

دانشگاه سواد

مقاومت مصالح

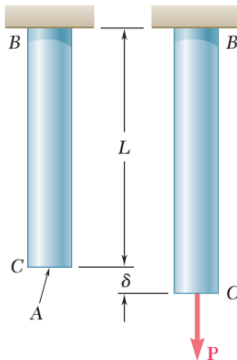
مبحث سوم:

اعضای تحت نیروی محوری

مدرس: دکتر محمد رضا میرجلیلی



تغییر طول اعضای تحت نیروی محوری



وقتی عضو میله ای تحت نیروی P کشیده یا فشرده می شود، تغییر طول می دهد.

مقدار این تغییر طول را با روابط دو فصل گذشته به آسانی می توان به دست آورد:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$$

$$\delta = \epsilon L$$

$$\delta = \frac{PL}{AE}$$

اگر این رابطه را با رابطه نیرو-تغییر طول فنر مقایسه کنید، خواهیم داشت:

$$\Delta = \frac{P}{K} \rightarrow K = \frac{AE}{L}$$

یعنی یک عضو میله ای تحت نیروی محوری مثل یک فنر با سختی AE/L رفتار می کند. به این نسبت **سختی محوری** گفته می

شود. هر چه سختی محوری بیشتر باشد، مقاومت عضو در مقابل تغییر شکل بیشتر است، یا به اصطلاح سخت تر است. هر چه سطح مقطع

و ضریب الاستیسیته بیشتر و طول عضو کمتر باشد، سخت تر است و تغییر شکل کمتری خواهد داشت.

تغییر طول در اعضای محوری غیر یکنواخت

۱- هر گاه در طول عضو، سطح مقطع، نیروی محوری یا جنس مصالح تغییراتی به صورت توابعی

$$\delta = \int_0^L \frac{P(x)dx}{A(x)E(x)}$$

پیوسته از طول داشته باشند، آنگاه تغییر طول را می توان از رابطه روبرو محاسبه کرد:

تغییر طول در اعضای محوری چند میله ای

۲- در مواردی که چند میله متوالی با مشخصات متفاوتی از سطح مقطع، نیروی محوری یا جنس

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

مصالح داشته باشیم، آنگاه برای هر قسمت به صورت جداگانه تغییر طول را محاسبه کرده و در نهایت

با هم جمع می کنیم:

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} + \sum_i \alpha_i L_i \Delta T$$

در حالت کلی که علاوه بر نیروی محوری، اختلاف دما نیز وجود داشته باشد، تغییر طول برابر است با:

تفاوت تغییر شکل Deformation با تغییر مکان (جابجایی) Deflection یا Displacement

منظور از تغییر شکل، تغییر طول یا تغییر حجم یک عضو می باشد و نسبت به طول یا حجم اولیه سنجیده می شود. ولی تغییر مکان،

یعنی جابجایی یک نقطه از موقعیت اولیه خود. در بسیاری از مواقع برای به دست آوردن جابجایی یک نقطه از عضو لازم است تا

رابطه ای بین تغییر شکل های اعضای سیستم به دست آوریم.



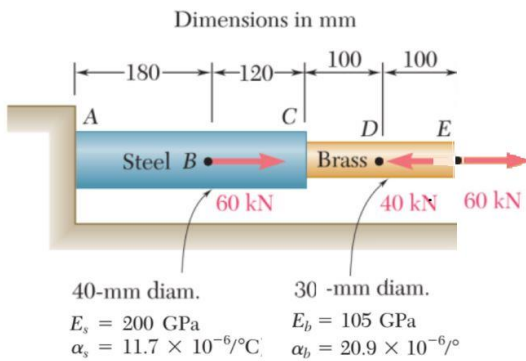
مثال ۱: محاسبه تغییر طول یک عضو چند میله ای

در عضو چند میله ای روبرو، علاوه بر نیروهای اعمال شده،

اختلاف دمای ۳۰ درجه نیز به سیستم وارد می شود.

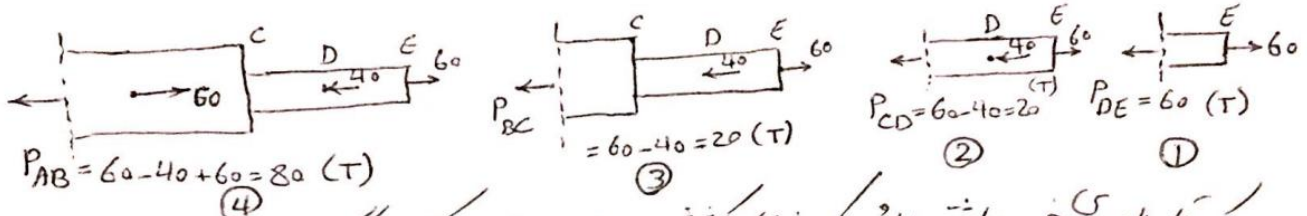
الف- تغییر طول کل عضو را محاسبه کنید.

ب- تغییر مکان نقطه D چقدر است؟



$$\delta = \sum \delta_i = \delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD} + \delta_{DE}$$

ابتدا باید نیروی محوری هر یک از نقاط را بدست آورد. برای این کار آسان تر است که از سر کزاد شروع کنیم. یعنی هر جا که مقطع می زنیم، آن قطعه که آزاد می ماند به انتخاب کردن دینر محوری را می بینیم.



یک قرارداد برای خود داشته باشید که نیروی کشش را مثبت فرض کنید. (اگر نیرو از نقطه مورد بررسی بر سمت چپ وارد باشد، مثبت فرض می گردد.)

$$\delta_{AB} = \frac{P_{AB} L_{AB}}{(EA)_{AB}} + \alpha L \Delta T = \frac{80 \times 10^3 (N) \times 180 (mm)}{200 \times 10^3 (MPa) \times \frac{1}{4} \pi (40)^2} + 11.7 \times 10^{-6} \times 180 (mm) \times 30$$

$$= 0.057 + 0.063 = 0.12 (mm)$$

$$\delta_{BC} = \frac{P_{BC} L_{BC}}{(EA)_{BC}} + \alpha L \Delta T = \frac{20 \times 10^3 (N) \times 120 (mm)}{200 \times 10^3 (MPa) \times \frac{1}{4} \pi (40)^2} + 11.7 \times 10^{-6} \times 120 (mm) \times 30$$

$$= 0.0076 + 0.042 = 0.05 (mm)$$

$$\delta_{CD} = \frac{P_{CD} L_{CD}}{(EA)_{CD}} + \alpha L \Delta T = \frac{20 \times 10^3 (N) \times 100 (mm)}{105 \times 10^3 (MPa) \times \frac{1}{4} \pi (30)^2} + 20.9 \times 10^{-6} \times 100 (mm) \times 30$$

$$= 0.027 + 0.0627 = 0.09 (mm)$$

$$\delta_{DE} = \frac{P_{DE} L_{DE}}{(EA)_{DE}} + \alpha L \Delta T = \frac{60 \times 10^3 (N) \times 100 (mm)}{105 \times 10^3 (MPa) \times \frac{1}{4} \pi (30)^2} + 20.9 \times 10^{-6} \times 100 (mm) \times 30$$

$$= 0.08 + 0.0627 = 0.14 (mm)$$



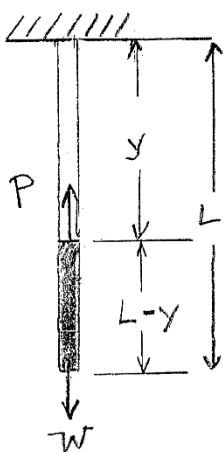
(الف) افزایش طول $\delta_{ABCD} = 0.12 + 0.05 + 0.09 + 0.14 = 0.4 \text{ (mm)}$

(ب) تغییر مکان نقطه D $\Delta_D = \delta_{D/A} = \delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD} = 0.12 + 0.05 + 0.09 = 0.26 \text{ (mm)}$
به سمت راست $\rightarrow$

مثال ۲: محاسبه تغییر طول یک عضو دارای خصوصیات متغیر نسبت به طول (در این مثال نیروی محوری در طول عضو تغییر می کند)

یک میله همگن به طول L و چگالی ρ و مدول الاستیته E از یک سر کردن شده است.
(الف) مقدار تغییر طول میله را تحت وزن خودش محاسبه کنید.
(ب) نشان دهید که این مقدار تغییر طول معادل تغییر طول میله افقی می باشد که تحت نیروی $\frac{1}{2}$ برابر وزن میله قرار گرفته است.

(a) For element at point identified by coordinate y ,



$$\begin{aligned} P &= \text{weight of portion below the point} \\ &= \rho g A(L - y) \\ d\delta &= \frac{P dy}{EA} = \frac{\rho g A(L - y) dy}{EA} = \frac{\rho g(L - y)}{E} dy \\ \delta &= \int_0^L \frac{\rho g(L - y)}{E} dy = \frac{\rho g}{E} \left(Ly - \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^L \\ &= \frac{\rho g}{E} \left(L^2 - \frac{L^2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{\rho g L^2}{E} \blacktriangleleft$$

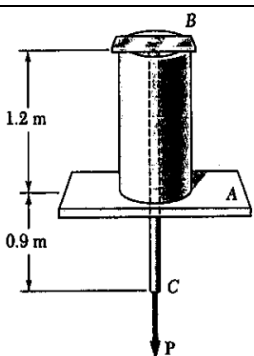
(b) Total weight:

$$W = \rho g AL$$

$$F = \frac{EA\delta}{L} = \frac{EA}{L} \cdot \frac{1}{2} \frac{\rho g L^2}{E} = \frac{1}{2} \rho g AL$$

$$F = \frac{1}{2} W \blacktriangleleft$$

مثال ۳: محاسبه تغییر مکان نقطه ای خاص از سیستم



یک لوله آلومینیوم AB ($E_a = 72 \text{ GPa}$) با سطح مقطع 1100 mm^2 برای یک میله کاملاً صلب قرار گرفته است. یک میله فولادی BC ($E_s = 200 \text{ GPa}$) با قطر 15 mm به رابط میله قطع صلب از انتهای آزاد لوله آویزان شده است. چنانچه نیروی 60 kN به انتهای میله فولادی وارد شود، جابجایی نقطه C چند خواهد شد؟



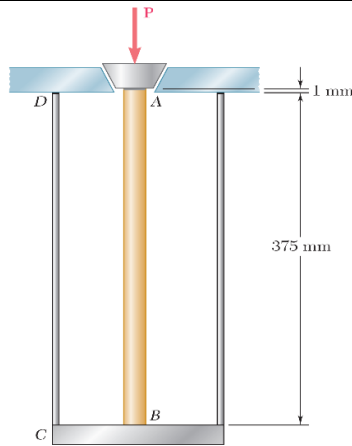
$\Delta_C = \delta_{CB} + |\delta_{AB}|$ ← کش آمدن سله BC = جابجایی نقطه C نسبت به A + فشردن لوله AB

$\delta_{CB} = \frac{PL}{EA} = \frac{60 \times 10^3 (N) \times 2100 (mm)}{200 \times 10^3 (MPa) \times \frac{\pi}{4} (15)^2 (mm^2)} = 3.57 \text{ mm}$ کش می آید

$\delta_{AB} = \frac{PL}{EA} = \frac{-60 \times 10^3 (N) \times 1200 (mm)}{72 \times 10^3 (MPa) \times 1100 (mm^2)} = -0.91 \text{ mm}$ فشرده می شود.

$\Delta_C = 3.57 + 0.91 = 4.47 \text{ mm} \downarrow$ حرکت پایین می داند.

مثال ۴: محاسبه تغییر مکان نقطه ای خاص از سیستم



یک لوله برنجی AB ($E = 105 \text{ GPa}$) با سطح مقطع 140 mm^2 برای یک صفحه صلب که در انتهای پایینی سلفیدر آلومینیم CD ($E = 72 \text{ GPa}$) با سطح مقطع 250 mm^2 قرار دارد، یکمکه داده است. درپوش سر بالایی لوله برنجی ۱ mm لغز دارد. چه نیرویی باید به درپوش وارد کرد تا به طور کامل سبته شود؟

کش آمدن سلفیدر آلومینیم CD + فشردن لوله برنجی AB = جابجایی نقطه A

$\downarrow \Delta_A = |\delta_{AB}| + \delta_{CD} = 1 \text{ mm}$

$\delta_{AB} = \left(\frac{PL}{EA} \right)_{AB} = \frac{P \times 375 (mm)}{105 \times 10^3 (MPa) \times 140 (mm^2)} = 25.58 \times 10^{-6} P$

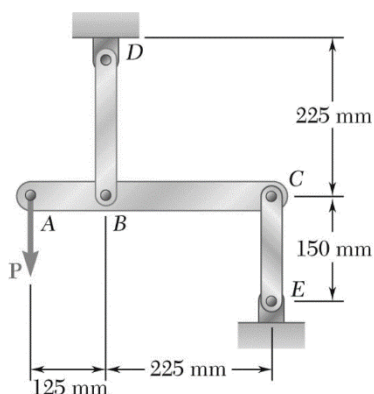
$\delta_{CD} = \left(\frac{PL}{EA} \right)_{CD} = \frac{P \times 1 (mm)}{72 \times 10^3 (MPa) \times 250 (mm^2)} = 20.83 \times 10^{-6} P$

$\Delta_A = (25.58 + 20.83) \times 10^{-6} P = 1 \text{ mm}$ برای سبته شدن سلفیدر آلومینیم، جابجایی باید ۱ mm باشد.

$P = 21.55 \times 10^3 \text{ N} = 21.55 \text{ kN}$

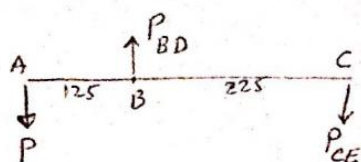


مثال ۵: محاسبه تغییر مکان نقطه ای خاص از سیستم



در سیستم دربردارنده، تسمه BD از جنس برنج ($E = 105 \text{ GPa}$)
با سطح مقطع 240 mm^2 ، تسمه CE از جنس آلومینیم
($E = 72 \text{ GPa}$) با سطح مقطع 300 mm^2 می باشد.
قطعه ABC صلب است. حداکثر مقدار نیروی P چقدر
می تواند باشد، به گونه ای که جابجایی نقطه A از ۰.۳۵ mm تجاوز نکند.

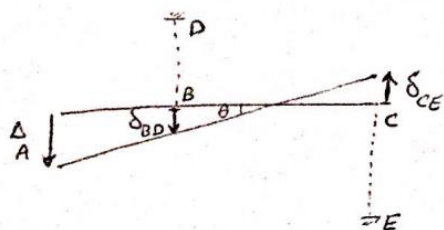
تحلیل می شود. ابتدا دیگران آزاد نیروها بر عضو صلب ABC رسم می گردد.



$$\sum M_B = 0 \rightarrow P \times 125 = P_{CE} \times 225 \rightarrow P_{CE} = 0.56 P$$

$$\sum M_C = 0 \rightarrow P \times 350 = P_{BD} \times 225 \rightarrow P_{BD} = 1.56 P$$

حال باید با رسم دیگران تغییر شکل سیستم، ارتباط جابجایی نقطه A با تغییر طول تسمه های BD، CE را بنویسیم.



$$\theta = \frac{\delta_{BD} + \delta_{CE}}{L_{BC}} \Rightarrow \Delta_A = \delta_{BD} + L_{AB} \times \theta$$

$$\delta_{BD} = \left(\frac{PL}{EA} \right)_{BD} = \frac{1.56 P \times 225}{105 \times 10^3 \times 240} = 13.9 \times 10^{-6} P$$

$$\delta_{CE} = \left(\frac{PL}{EA} \right)_{CE} = \frac{0.56 P \times 150}{72 \times 10^3 \times 300} = 3.85 \times 10^{-6} P$$

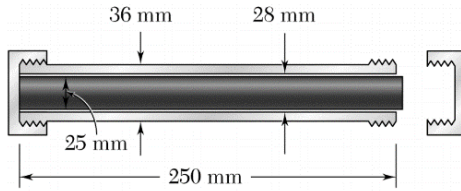
$$\theta = \frac{\delta_B + \delta_C}{L_{BC}} = \frac{(13.9 + 3.85) \times 10^{-6}}{225} = 78.87 \times 10^{-9} P$$

$$\Delta_A = \delta_B + L_{AB} \theta = 13.9 \times 10^{-6} P + 125 \times 78.87 \times 10^{-9} P = 23.75 \times 10^{-6} P$$

$$\Delta_A = 0.35 \text{ mm} = 23.75 \times 10^{-6} P \rightarrow P = 14.74 \text{ kN}$$



مثال ۶: ارتباط تغییر شکل و نیروی محوری



تیرب اکونیسیم ($E = 70 \text{ GPa}$) به طول 250 mm و قطر برزنی 36 mm و قطر داخلی 28 mm در انتهای خود یک سرزده شده با لگام 1.5 mm دارد که توسط مهره سبتمی شود. در داخل آن یک میله برنجی ($E = 105 \text{ GPa}$) به قطر 25 mm قرار دارد که طول آن اندکی بزرگتر از تیرب است. برای اینکه مهره در پایش کاملاً بسته شود، لازم است مهره $\frac{1}{4}$ در از آن حرکت کند. اگر مهره چرخانده شود. (الف) تنش نرمال میگیریم آیا در شده در تیرب و میله را می‌توانیم پیدا کنیم. (ب) تغییر طول تیرب و میله را حساب کنید.

وقتی مهره به اندازه $\frac{1}{4}$ در حرکت می‌شود، یعنی $\frac{1}{4} \times 1.5 = 0.375 \text{ mm}$ بر روی تیرب اکونیسیم حرکت می‌کند. این حرکت باعث فشرده شدن میله برنجی و کشیده شدن تیرب اکونیسیم می‌شود. مجموع فشرده شدن میله و کشیده شدن تیرب برابر با جایی که مهره در از آن حرکت می‌کند. همچنین نیروی فشاری میله و نیروی کششی تیرب کشش و واکنش هستند و با هم برابرند.

$$\textcircled{D}: \delta_{\text{tube}} + |\delta_{\text{rod}}| = \frac{1}{4} \times 1.5 \text{ mm} = 0.375 \text{ mm}$$

$$\delta_{\text{tube}} = \left(\frac{PL}{EA} \right)_{\text{tube}} = \frac{P \times 250 \text{ (mm)}}{70 \times 10^3 \text{ (MPa)} \times \frac{\pi}{4} (36^2 - 28^2) \text{ (mm}^2\text{)}} = 8.88 \times 10^{-6} P$$

$$\delta_{\text{rod}} = \left(\frac{PL}{EA} \right)_{\text{rod}} = - \frac{P \times 250 \text{ (mm)}}{105 \times 10^3 \text{ (MPa)} \times \frac{\pi}{4} (25^2) \text{ (mm}^2\text{)}} = -4.85 \times 10^{-6} P$$

$$\textcircled{D} \rightarrow (8.88 + 4.85) \times 10^{-6} P = 375 \text{ mm}$$

$$P = 27.3 \times 10^3 \text{ N} = 27.3 \text{ kN}$$

$$\textcircled{a} \quad \sigma_{\text{tube}} = \frac{P}{A_{\text{tube}}} = \frac{27.3 \times 10^3 \text{ (N)}}{\frac{\pi}{4} (36^2 - 28^2) \text{ (mm}^2\text{)}} = 67.9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{rod}} = \frac{P}{A_{\text{rod}}} = \frac{-27.3 \times 10^3 \text{ (N)}}{\frac{\pi}{4} (25^2) \text{ (mm}^2\text{)}} = -55.6 \text{ MPa}$$

$$\textcircled{b} \quad \delta_{\text{tube}} = 8.88 \times 10^{-6} \times 27.3 \times 10^3 = 0.242 \text{ mm}$$

$$\delta_{\text{rod}} = -4.85 \times 10^{-6} \times 27.3 \times 10^3 = -0.132 \text{ mm}$$



تحلیل سیستم‌های نامعین متشکل از اعضای محوری

همانطور که می‌دانید، در سیستم‌های نامعین، تعداد مجهولات از تعداد معادلات تعادل استاتیکی بیشتر است. بنابراین نمی‌توان با علم استاتیک به تنهایی مجهولات را به دست آورد. در این موارد باید از جنس دیگری از معادلات به نام **معادلات سازگاری تغییر مکان** استفاده کنیم. به این معنی که ارتباطی بین تغییر مکان نقاط مختلف سیستم با یکدیگر وجود دارد که می‌توان از آن استفاده نمود. اینجاست که علم مقاومت مصالح به کمک ما می‌آید. مجموع معادلات تعادل استاتیکی و سازگاری تغییر مکان باید مساوی مجهولات مورد نظر باشد. معمولاً روند زیر برای حل مسائل نامعین به کار می‌رود:

گام اول: رسم دیاگرام تغییر شکل سیستم

گام دوم: یافتن ارتباط بین تغییر شکل اعضای مختلف سیستم (روابط سازگاری تغییر شکل)

گام سوم: تبدیل فرم روابط تغییر شکلی به روابط نیرویی

گام چهارم: رسم دیاگرام آزاد نیروها و استخراج معادلات تعادل استاتیکی

گام پنجم: تشکیل دستگاه معادلات و مجهولات و حل مساله

به طور کلی سه تیپ مسئله نامعین وجود دارد. به مثالهای زیر توجه کنید، قضیه دستتان می‌آید!

تیپ اول (سیستم ترکیبی میله‌های صلب و انعطاف پذیر):

در این مسائل، یک میله صلب توسط چند میله یا کابل انعطاف پذیر و احياناً قیدهای تکیه گاهی مهار شده است. چنانچه نیرویی به میله صلب وارد آید، باعث تغییر مکان میله صلب شده و این موضوع در میله‌های انعطاف پذیر نیرو ایجاد می‌کند.

تیپ دوم (میله‌های مقید):

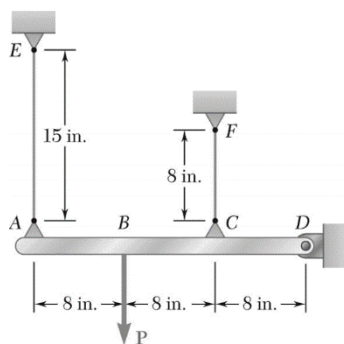
در این گونه مسائل، معمولاً قید اضافه‌ای وجود دارد که سیستم را نامعین می‌کند. برای حل آنها، باید قید اضافه را حذف نموده و به جای آن واکنش تکیه گاهی به صورت نیروی مجهول گذاشت. از طرفی جابجایی آن نقطه را صفر فرض می‌کنیم. این همان رابطه سازگاری می‌باشد.

تیپ سوم (میله‌های مرکب):

در این مسائل یک عضو محوری مرکب از دو یا چند مقطع با مصالح مختلف می‌باشد که در طول عضو محوری به هم متصل هستند. مقدار سهم باربری محوری هر عضو نسبت به کل بار محوری وارد بر مقطع مجهول است. معادله سازگاری در این گونه مسائل، مساوی بودن تغییر طول دو عضو می‌باشد. از حل این معادله نتیجه می‌شود که سهم باربری هر مقطع، به نسبت سختی محوری آن مقطع (EA) می‌باشد.



مثال ۷: تحلیل سازه های نامعین - سیستم ترکیبی میله های صلب و انعطاف پذیر



میله صلب AD توسط دو کابل به قطر $\frac{1}{16}$ (in) و $E = 29 \times 10^6$ psi

در تکیه گاه مفصلی D، گنجه دار شده است. چنانچه نیروی $P = 120$ lb

بر نقطه B وارد شود، تعیین کنید:

مقدار نیروی محوری ایجاد شده در کابل ها

مجهود: D_x, D_y, P_{AE}, P_{CF}

معادلات: $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_D = 0$
شرایط تغییر شکل: $\delta_A = 3\delta_C$

تشریح معادلات حاصل شده:

(دیگرام تغییر شکل)



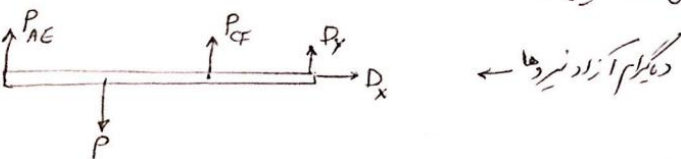
$$\theta = \frac{\delta_C}{8} = \frac{\delta_A}{24} \rightarrow \delta_A = 3\delta_C \quad (1)$$

این معادله از جنس تغییر شکل است و باید به معادله نیروی تبدیل شود.

$$\delta_A = \frac{P_{AE} L_{AE}}{AE}, \quad \delta_C = \frac{P_{CF} L_{CF}}{AE} \rightarrow P_{AE} = 3 P_{CF} \frac{L_{CF}}{L_{AE}} \quad (1^*)$$

دقت شود که با نرم به تغییر شکل سیستم، میله های AE، CF هر دو در کشش می افتند.

معادلات متادل استاتیکی:



دیگرام آزاد نیروها

$$\sum M_D = 0 \rightarrow 16P = 8P_{CF} + 24P_{AE} \rightarrow 2P = P_{CF} + 3P_{AE} \quad (2)$$

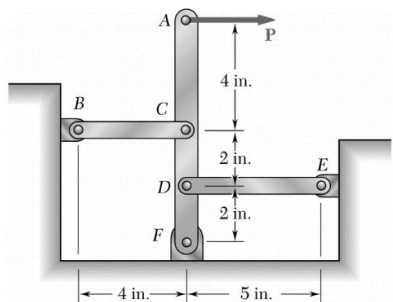
$$\begin{aligned} (1^*), (2) &\Rightarrow 2P = P_{CF} + 9P_{CF} \times \frac{L_{CF}}{L_{AE}} \rightarrow P_{CF} = \frac{2P}{5.8} = \frac{2 \times 120}{5.8} \\ &P_{CF} = 41.4 \text{ lb} \end{aligned}$$

$$(1^*): P_{AE} = 3 \times 41.4 \times \frac{8}{15} = 66.2 \text{ lb}$$

برای محاسبه نیروهای تکیه گاه ها D_x, D_y ، از معادلات $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ استفاده می شود.



مثال ۸: تحلیل سازه های نامعین - سیستم ترکیبی میله های صلب و انعطاف پذیر



تسمه های BD, DE از جنس فولاد ($E = 29 \times 10^6 \text{ psi}$) ،
عرض $\frac{1}{2} \text{ (in)}$ و ضخامت $\frac{1}{4} \text{ (in)}$ می باشند. نیروی $P = 600 \text{ lb}$
به نقطه A وارد می آید. (الف) نیروی محوری (بجارت شده در تسمه ها
را می سنجید. (ب) تغییر مکان نقطه A را می سنجید.

مجموعه: P_{BC}, P_{DE}, F_x, F_y

معادلات: $\begin{cases} \sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_F = 0 \\ \delta_c = 2\delta_D \end{cases}$

تشریح معادله، مثل مثال ۷.

تا قدم به جهت ای ل نیروی P به سیستم، میله FA به صورت سگسرد حول F می چرخد.
میله BC در کشش، میله DE در فشار می افتد.

* معادله سگسردی تغییر مکان:



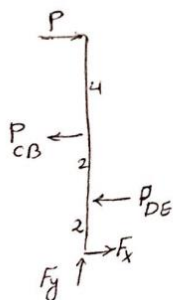
$$\theta = \frac{\delta_D}{2} = \frac{\delta_c}{4} \rightarrow \delta_c = 2\delta_D \quad (1)$$

تبدیل معادله سگسردی به فرم نیرویی:

$$\delta_D = -\frac{P_{DE} \times L_{DE}}{AE}, \quad \delta_c = \frac{P_{CB} \times L_{CB}}{AE}$$

$$(1) \quad P_{CB} \times 4 = 2 \times P_{DE} \times 5 \rightarrow P_{CB} = 2.5 P_{DE} \quad (2)$$

* معادلات نیرویی:



$$\sum M_F = 0 \rightarrow 2 P_{DE} + 4 P_{CB} = 8 P$$

$$P_{DE} + 2 P_{CB} = 4 P \quad (3)$$

$$(1), (2): P_{DE} + 2 \times 2.5 P_{DE} = 6 P_{DE} = 4 P \rightarrow$$

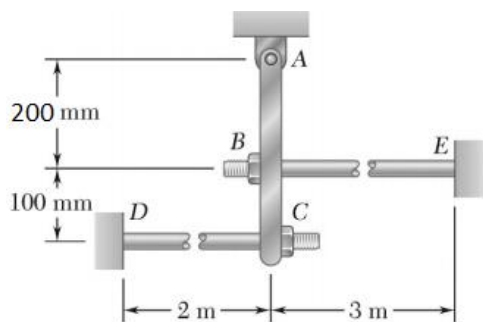
$$P_{DE} = \frac{2}{3} P = \frac{2}{3} \times 600 = 400 \text{ lb} \quad \text{فشاری}$$

$$P_{CB} = 2.5 P_{DE} = 2.5 \times 400 = 1000 \text{ lb} \quad \text{کششی}$$

* تغییر مکان نقطه A: $\delta_A = 3\theta = 3 \times \left(\frac{\delta_D}{2}\right) = 4\delta_D = 4 \times \frac{P_{DE} \times L_{DE}}{AE} = 2.21 \times 10^{-3} \text{ in} \rightarrow$



مثال ۹: تحلیل سازه های نامعین - سیستم ترکیبی میله های صلب و انعطاف پذیر



در سیستم دربردارنده میله AC صلب بوده در میله های BE و CD با قطر 16 mm و از جنس فولاد ($E = 200 \text{ GPa}$) می باشند.

پس از آنکه سیستم در حال تعادل قرار گرفت، مهره C به اندازه یک دور با گام 2.5 mm سفت می شود. میسب کنید:

(۱) مقدار نیروی ایجاد شده در میله ها

(۲) مقدار تغییر مکان نقطه C از میله AC

پیش فرض ها: وقتی مهره میله CD یک دور سفت می شود، میله AC حول A به چرخش می گردد فرض می کند. این چرخش به دلیل نیروی است که از طرف مهره در نقطه C به سمت چپ اعمال می گردد. بنابراین میله BE درگشتش می افتد و خود میله CD هم درگشتش می افتد. (دقت کنید وقتی مهره نیروی به سمت چپ به میله AC اعمال می کند، میله AC نه درگشتش، نیروی به سمت راست به مهره وارد کرده و این باعث کشیده شدن میله CD می شود.)

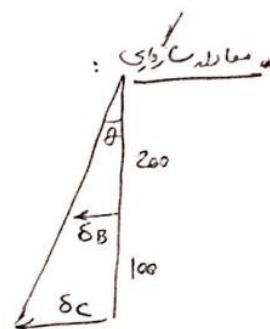
بنابراین تغییر مکان نقطه C را با حرکت به اندازه یک گام زرده (2.5 میلی متر) به سمت چپ و حرکت به اندازه گشت کردن میله CD به سمت راست:

$$\delta_C = \delta_{\text{turn}} - \delta_{CD} = 2.5 \text{ mm} - \frac{P_{CD} L_{CD}}{EA}$$

$$\delta_B = \frac{P_{BE} L_{BE}}{AE}$$

$$\theta = \frac{\delta_B}{200} = \frac{\delta_C}{300} \rightarrow \delta_B = \frac{2}{3} \delta_C$$

معادله سازگاری

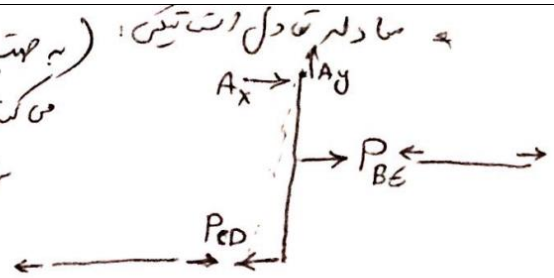


تغییر فرموله سازگاری به نیروی $\rightarrow \frac{P_{BE} L_{BE}}{AE} = \frac{2}{3} \left(2.5 - \frac{P_{CD} L_{CD}}{AE} \right)$

$$\frac{P_{BE} \times 3000}{\frac{\pi}{4} \times 16^2 \times 200 \times 10^3} = \frac{2}{3} \left(2.5 - \frac{P_{CD} \times 2000}{\frac{\pi}{4} \times 16^2 \times 200 \times 10^3} \right) \quad (1^*)$$



۱. مدل ساده شده است. (به جهت نیروهای وارد بر میله AC دقت کنید. میله C نیروی بکشی دارد)
 ۲. میله CD در کشش می افتد. میله BE هم مقاومت می کند و میله AC در
 ۳. بکشی است بر میله CD (بکشی است بر میله CD)
 ۴. $\sum M_A = 0 \rightarrow P_{BE} \times 200 = P_{CD} \times 300$



$$P_{BE} = 1.5 P_{CD} \quad (2)$$

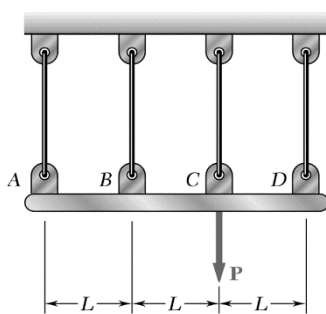
۱، ۲ : $P_{CD} = 11.5 \text{ kN}$, $P_{BE} = 17.25 \text{ kN}$

۳. تغییرات طول و زاویه میله AC

$$\delta_B = \frac{P_{BE} L_{BE}}{AE} = \frac{1725 \times 10^3 \times 3000}{\frac{\pi}{4} \times 16^2 \times 200 \times 10^3} = 1.29 \text{ mm}$$

$$\theta = \frac{\delta_B}{200} = \frac{1.29}{200} = 0.00644 \text{ rad}$$

$$\delta_C = 300 \theta = 300 \times 0.00644 = 1.93 \text{ mm}$$



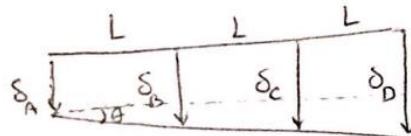
مثال ۱۰: تحلیل سازه های نامعین - سیستم ترکیبی میله های صلب و انعطاف پذیر

۱. میله صلب ABCD توسط چهار گابل آویزان شده است.
 ۲. چنانچه نیروی P در نقطه C اعمال شود، نیروهای ایجاد شده در گابل ها محاسبه کنید.

۳. مجهولات: P_A, P_B, P_C, P_D

۴. معادلات: $\sum F_y = 0$, $\sum M = 0$

۵. معادلات: $\delta_C = f(\delta_A, \delta_B)$, $\delta_D = f'(\delta_A, \delta_B)$



$$\theta = \frac{\delta_B - \delta_A}{L}$$

$$\delta_C = \delta_A + 2L\theta = \delta_A + 2(\delta_B - \delta_A) = 2\delta_B - \delta_A \quad (1)$$

$$\delta_D = \delta_A + 3L\theta = \delta_A + 3(\delta_B - \delta_A) = 3\delta_B - 2\delta_A \quad (2)$$

$$\delta_A = \frac{P_A L}{EA}, \quad \delta_B = \frac{P_B L}{EA}, \quad \delta_C = \frac{P_C L}{EA}, \quad \delta_D = \frac{P_D L}{EA}$$

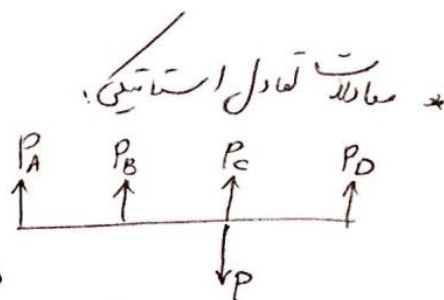
$$\rightarrow P_C = 2P_B - P_A \quad (1^*)$$

$$\rightarrow P_D = 3P_B - 2P_A \quad (2^*)$$

$$\textcircled{3} \sum M_C = 0 \rightarrow P_D = P_B + 2P_A$$

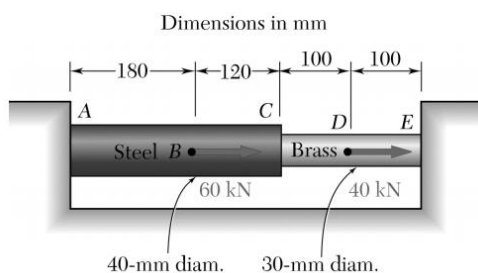
$$\textcircled{4} \sum F_y = 0 \rightarrow P_A + P_B + P_C + P_D = P \quad (3^*)$$

$$\begin{aligned} \text{From } 2^*, 3^*: \quad 2P_B - 4P_A = 0 &\rightarrow P_B = 2P_A \\ \text{From } 1^*, 2^*, 3^*, 4: \quad P_A + 2P_A + 3P_A + 4P_A - P = 0 &\rightarrow P_A = 0.1P, P_B = 0.2P, P_C = 0.3P, P_D = 0.4P \end{aligned}$$



تپ دوم: میله های مقید

مثال ۱۱: تحلیل سازه های نامعین - میله های مقید



در میله فولادی ($E_s = 200 \text{ GPa}$)، برنجی ($E_b = 105 \text{ GPa}$)

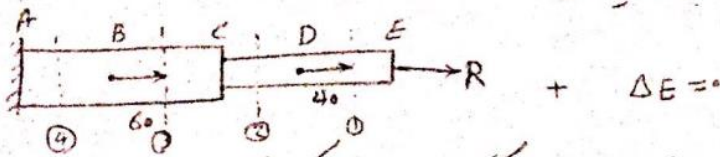
مطابق شکل بین دو تکیه قرار گرفته و نیروی کششی وارد شده به آنرا ایستاده است. موارد زیر را محاسبه کنید:

(۱) نیروی کششی تکیه گاه A و E

(۲) جابجایی نقطه C



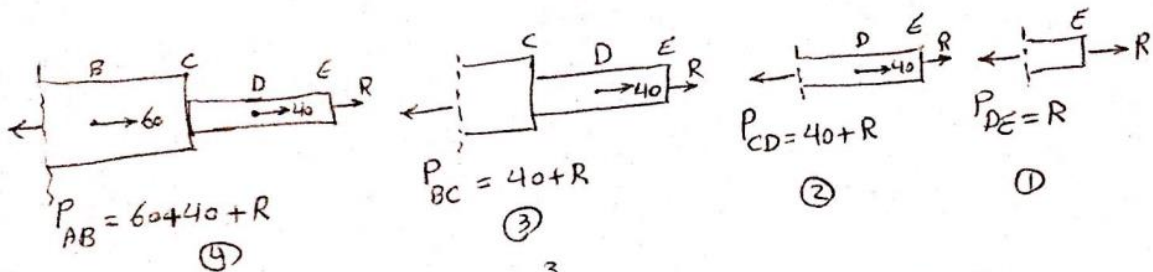
مثال را می توان به سه صورت زیر باز نویسی کرد:



به جای نیروی کشنده می E ، یک نیروی محمول می گذاریم . دلت کنید که جهت این نیرو مهم نیست فقط بر اساس همان جهت فرض شده ، نیروی داخلی و در نقاط مختلف باید با یک دایره در جهت R متغی شود ، یعنی جهت استاتیکی در این می باشد .

$$\Delta E = 0 \rightarrow \delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD} + \delta_{DE} = 0$$

نیروی داخلی هر کدام از نقاط به شرح زیر بدست می آید .



$$\delta_{AB} = \left(\frac{PL}{EA} \right)_{AB} = \frac{(100+R) \times 10 \times 120}{200 \times 10^3 \times \frac{\pi}{4} (40)^2} = 7.16 (R+100) \times 10^{-4}$$

$$\delta_{BC} = \left(\frac{PL}{EA} \right)_{BC} = \frac{(40+R) \times 10 \times 120}{200 \times 10^3 \times \frac{\pi}{4} (40)^2} = 4.78 \times 10^{-4} (40+R)$$

$$\delta_{CD} = \left(\frac{PL}{EA} \right)_{CD} = \frac{(40+R) \times 10 \times 100}{105 \times 10^3 \times \frac{\pi}{4} (30)^2} = 13.48 \times 10^{-4} (40+R)$$

$$\delta_{DE} = \left(\frac{PL}{EA} \right)_{DE} = \frac{(R) \times 10 \times 100}{105 \times 10^3 \times \frac{\pi}{4} (30)^2} = 13.48 \times 10^{-4} (R)$$

$$\delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD} + \delta_{DE} = 0 \rightarrow 7.16 (R+100) + 4.78 (40+R) + 13.48 (40+R) + 13.48 R = 0 \rightarrow R_E = -37.2 \text{ kN} \leftarrow$$

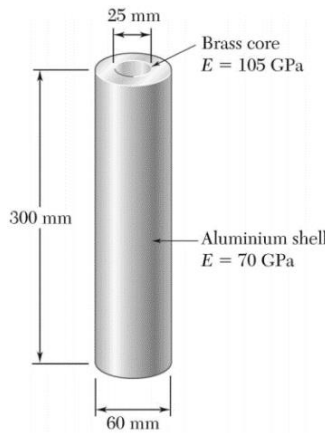
$$R_A = A \text{ می باشد نیروی کشنده می A} : \sum F_x = 0 \rightarrow R_A + 60 + 40 - 37.2 = 0 \rightarrow R_A = -62.8 \text{ kN} \leftarrow$$

$$\delta_C = \delta_{AB} + \delta_{BC} = 7.16 \times 10^{-4} (100 - 37.2) + 4.78 \times 10^{-4} (40 - 37.2) = + 0.046 \text{ mm} \rightarrow$$



تیپ سوم: میله‌های مرکب

مثال ۱۲: تحلیل سازه‌های نامعین - میله‌های مرکب



میله مرکب رو برد از هسته برنجی و پوسته آلومینیومی که به هم پیوسته است

تکین شده است. نیروی $P = 200 \text{ kN}$ به میله وارد می‌شود.

۱) تنش نرمال ایجاد شده در پوسته هسته را می‌یابید.

۲) مقدار تغییر طول میله را به دست آورید.

نیروی کشش در مرکب ازت ملح آلومینیومی یا هسته برنجی. ابتدا لازم است که نیروی وارد و این مصالح

بریک دانه هسته برنجی P_b ، نیروی وارد و سطح آلومینیومی P_a

معادله استاتیکی $P_a + P_b = P$

معادله سازگاری تغییرات $\delta_a = \delta_b = \delta$

$$\delta_a = \left(\frac{P_a L}{EA} \right)_a , \delta_b = \left(\frac{P_b L}{EA} \right)_b \rightarrow \frac{P_a}{(EA)_a} = \frac{P_b}{(EA)_b} \rightarrow \boxed{\frac{P_a}{P_b} = \frac{(EA)_a}{(EA)_b}}$$

این نتیجه خنثی نمی‌باشد که هم هر سطح ، به نسبت مساحتی محوری آن سطح است

$$\frac{P_a}{P} = \frac{(EA)_a}{(EA)_a + (EA)_b} = \frac{70 \times 10^3 \times \frac{\pi}{4} (60^2 - 25^2)}{70 \times 10^3 \times \frac{\pi}{4} (60^2 - 25^2) + 105 \times 10^3 \times \frac{\pi}{4} (25)^2} = 0.76$$

$$P_a = 0.76 P = 0.76 \times 200 = 152 \text{ kN}$$

$$P_b = 200 - 152 = 48 \text{ kN}$$

$$\sigma_a = \frac{P_a}{A_a} = \frac{152 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} (60^2 - 25^2)} = 65.1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = \frac{P_b}{A_b} = \frac{48 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} \times 25^2} = 97.8 \text{ MPa}$$

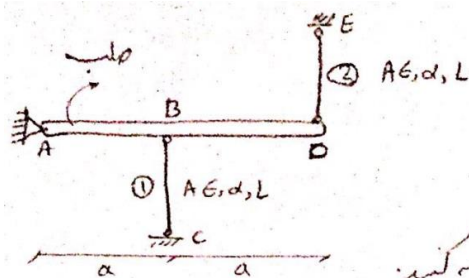
$$\delta_a = \delta_b = \delta = \left(\frac{P L}{EA} \right)_a = \left(\frac{P L}{EA} \right)_b = \frac{48 \times 10^3 \times 300}{105 \times 10^3 \times \frac{\pi}{4} (25)^2} = 0.28 \text{ mm}$$



تحلیل سیستم‌های نامعین متشکل از اعضای محوری در حضور اختلاف دما

در تمام مسائل پیشین می‌توان حالتی در نظر گرفت که در کنار نیروهای محوری (یا در عدم حضور آنها)، به عضو یا اعضای اختلاف دما اعمال گردد. اگر سازه معین باشد، اعمال اختلاف دما باعث ایجاد نیروهای داخلی در اعضا نمی‌شود، زیرا هیچ قید اضافی وجود ندارد که مانع حرکت آزاد سیستم شود. ولی در سازه‌های نامعین اگر به عضو یا اعضای اختلاف دما اعمال گردد، به دلیل وجود قیدهای اضافی اعضا نمی‌توانند آزادانه حرکت کنند و بر روی یکدیگر تأثیر می‌گذارند و در آنها نیرو به وجود می‌آید.

مثال ۱۳: تحلیل سازه‌های نامعین در حضور اختلاف دما - سیستم ترکیبی میله‌های صلب و انعطاف پذیر



در سیستم درجه‌های ۱ و ۲، به ازای ΔT افزایش داده می‌شود. نیروی ایستاده در میله‌ها ۱ و ۲ را محاسبه کنید.

معادلات: A_x, A_y, P_1, P_2

معادلات تعادل استاتیکی:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

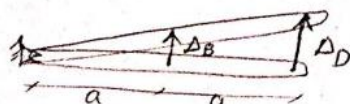
$$\sum M_A = 0$$

معادله سازگاری

$$\Delta D = 2 \Delta B$$

تشریح معادلات و حل سؤال: وقتی در میله ۱ افزایش می‌یابد، اگر میله ۲ نباشد، تغییر طول میله ۱ تغییر شکل میله صلب ABC (پوشش حول میله‌ها A) به آزادانه رخ می‌دهد. بدین دلیل نیروی در اعضا سیستم ایستاده. اما در این سازه نامعین، با افزایش در میله ۱، این میله افزایش طول می‌دهد و نه آزادانه بلکه میله ۲ حوضی پوشش میله صلب ABD را گرفته و تا حدودی متراکم می‌کند. بنابراین هم در میله ۱ و هم میله ۲ نیروی در می‌شود.

* یافتن رابطه معادله سازگاری تغییر شکل‌ها:



$$\frac{\Delta_B}{\Delta_D} = \frac{1}{2} \rightarrow |\Delta_D| = 2|\Delta_B| \quad (1)$$

این معادله سازگاری از منحنی تغییر شکل است و باید به نیرو تبدیل شود.



$$|\Delta_D| = \left| -\frac{P_2 L}{AE} \right| \quad \text{عدم متناسبی با این دلیل کم می‌دهد ۲ در ۲ را می‌تواند}$$

$$|\Delta_B| = \left| \alpha L \Delta T - \frac{P_1 L}{AE} \right| \quad \text{اثر انقباض طول در نیروی محوری P۱ بیش از اثر انقباض طول}$$

$$\textcircled{1} \rightarrow \boxed{\frac{P_2 L}{AE} = 2 \left(\alpha L \Delta T - \frac{P_1 L}{AE} \right)} \quad \text{فرم نیرویی معادله‌های گامی} \quad \textcircled{1}$$

معادله استاتیکی



آنت شود که جهت نیروی P۱ و P۲ دارد می‌دهد

ABD و این است که در حرکت این عضو در جهت چرخش می‌دهد ABD یعنی شده است در این

مکان می‌دهد ۵ ثابت می‌کند پس در اثر انقباض، و مانع چرخش می‌شود ABD می‌دهد

در می‌دهد در این اثر انقباض طول ناشی از دریا، حرکت می‌دهد به صورت سگ در دریا و در آن راه می‌دهد و خودش در اثر انقباض می‌دهد

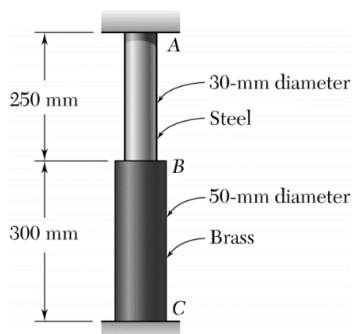
$$\sum M_A = 0 \rightarrow P_1 a = 2 P_2 a \rightarrow \boxed{P_1 = 2 P_2} \quad \textcircled{2}$$

با استفاده از ۲ معادله نیرویی و استاتیکی، نیروی P۱ و P۲ بدست می‌آید

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} : P_1 = 0.8 (\alpha \Delta T) AE \quad , \quad P_2 = 0.4 (\alpha \Delta T) AE$$

برای سبب Ax, Ay, می‌توان از معادله استاتیکی $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ استفاده کرد

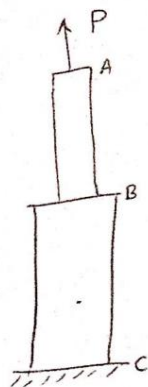
مثال ۱۴: تحلیل سازه‌های نامعین در حضور اختلاف دما - میله‌های مقید



در میله فولادی ($E_s = 200 \text{ GPa}$, $\alpha_s = 11.7 \times 10^{-6}$) در برنجی

($E_b = 105 \text{ GPa}$, $\alpha_b = 20.9 \times 10^{-6}$) به صورت شکل متال بین در

نکته: تراکم‌گرفته است. چنانچه اقلان ۵۰ درجه به سببها اعمال گردد، چه نیرویی در میله‌ها ایجاد می‌شود.



در این بارگذاری: $\delta_A = 0$

$$\delta_A = \delta_{AB} + \delta_{BC} = \left(\frac{PL}{EA}\right)_{AB} + \left(\frac{PL}{EA}\right)_{BC} + (\alpha L \Delta T)_{AB} + (\alpha L \Delta T)_{BC}$$

$$\delta_A = \frac{P \times 250}{200 \times 10^3 \times \frac{\pi}{4} (30)^2} + \frac{P \times 300}{105 \times 10^3 \times \frac{\pi}{4} (50)^2} + 11.7 \times 10^{-6} \times 250 \times 50 + 20.9 \times 10^{-6} \times 300 \times 50 = 0$$

$$3.224 \times 10^{-6} P = -459750 \rightarrow P = -142.62 \times 10^3 N = \underline{-142.6 \text{ KN}}$$

شاری

اگر مثال تنش شاری سیم AB را می‌خواهیم: $\sigma = \left(\frac{P}{A}\right)_{AB} = \frac{142.6 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} (30)^2} = 202 \text{ MPa}$

مثال ۱۵: تحلیل سازه‌های نامعین در حضور اختلاف دما - میله‌های مقید

مطابق شکل، بین دو میله A و B با شیب داده شده،

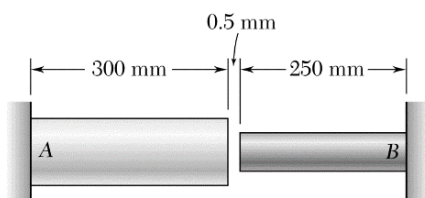
۱/۵ میلی‌متر فاصله است. در این حالت دو میله با ۲۰ درجه

است. در چه دمای تنش محوری ای برنده در میله

فولادی، ۱۵۰ MPa خواهد شد.

در این حالت، تغییر طول میله آلومینیمی نسبت به حالت اولیه

خیز می‌دهد.



Aluminum
A = 2000 mm²
E = 75 GPa
 $\alpha = 23 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$

Stainless steel
A = 800 mm²
E = 190 GPa
 $\alpha = 17.3 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$

تحتین مثال: با افزایش دمای میله‌ها، طول آنها افزایش یافته، تا جایی که فاصله بین آنها کاملاً از بین می‌رود. تا این جا هیچ نیرویی در میله‌ها به وجود نمی‌آید. از این مرحله به بعد با افزایش دما،

به علت وجود نیروی کششی که مانع از زیاد طول می‌شود، نیروی محوری در میله‌ها ایجاد خواهد شد.

سازمان ابتدا، دما ابتدا فاز دوم (انتها فاز اول) را می‌سبب کرده و از آنجا به بعد، حل ساده

مشابه مثال قبل خواهد بود. در این مثال به نیروی R داده شده است و ΔT مجهول است.

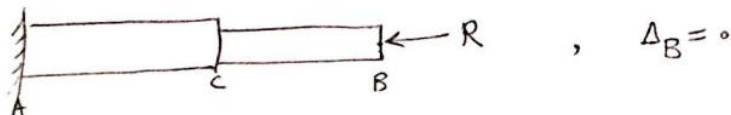


$$\alpha_1 L_1 (\Delta T_1) + \alpha_2 L_2 (\Delta T_2) = 0.5 \text{ mm}$$

$$(23 \times 10^{-6} \times 300 + 18 \times 10^{-6} \times 250) \Delta T_0 = 0.5 \rightarrow \Delta T_0 = 43.9 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T_1 - T_0 = T_2 - 20 = 43.9 \rightarrow \underline{T_2 = 63.9 \text{ } ^\circ\text{C}}$$

در فاردرسم، با افزایش دما نیرو در سلبه‌ها ایجا همراه شد.



$$\Delta_B = \delta_{AC} + \delta_{CB} = \sum \frac{PL}{EA} + \sum \alpha L \Delta T' = 0 \quad (1)$$

$$\frac{-R \times 250}{190 \times 10^3 \times 800} - \frac{R \times 300}{70 \times 10^3 \times 2000} + (23 \times 10^{-6} \times 300 + 18 \times 10^{-6} \times 250) \Delta T = 0$$

در صورت شل به نحوی نیروی R داده شد است، ΔT مجهول است.

$$\sigma = \frac{R}{A} \rightarrow R = 150 \times 800 = 120 \text{ kN}$$

①: $\Delta T = 39.8 \text{ } ^\circ\text{C} \rightarrow T_2 - T_1 = 39.8 \rightarrow \underline{T_2 = 39.8 + 63.9 = 103.7}$

* طول (تین) عضو فولادی:

$$\Delta L_{BC} = -\frac{RL}{EA} + \alpha L (T_2 - T_1) = -\frac{120 \times 10^3 \times 250}{190 \times 10^3 \times 800} + 18 \times 10^{-6} \times 250 (103.7 - 20)$$

$$\Delta L_{BC} = 0.179 \text{ mm} \rightarrow \underline{L_{BC} = 250.179 \text{ mm}}$$

مثال ۱۶: تحلیل سازه های نامعین در حضور اختلاف دما- میله های مرکب



Brass core
E = 105 GPa
 $\alpha = 20.9 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$

Aluminum shell
E = 70 GPa
 $\alpha = 23.6 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$

در میله مرکب برده و، دما میله از ۱۵ درجه (درجه سلسیوس) به ۱۹۵ درجه افزایش می یابد. در این حالت تنش محوری ای برسد در قطعه آلومینیم را می سنجید.

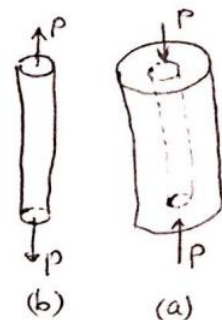


توجه: با اینکه در عضو محوری به یکدیگر متصل هستند، بنابراین تغییر طول در آن باید یکسان باشد.

$$\delta_a = \delta_b \quad \text{رابطه یابی}$$

با افزایش دما، آن قطعه که α بزرگتری دارد، افزایش طول بیشتری می خواهد داشته باشد چون به قطعه دیگر متصل است، نمی تواند آزادانه تغییر طول بدهد و همین دلیل در آن نیروی فشاری به وجود می آید. به همین ترتیب در قطعه دوم، تنش به نیروی کششی به وجود خواهد آمد.

این درنبره با هم سازی هستند (کش و داکشن)



$$\delta_a = \delta_b \rightarrow \delta_a = -\left(\frac{PL}{EA}\right)_a + (\alpha L \Delta T)_a$$

$$\delta_b = \left(\frac{PL}{EA}\right)_b + (\alpha L \Delta T)_b$$

$$\rightarrow -\frac{P \times L}{70 \times 10^3 \times \frac{\pi}{4} (60^2 - 25^2)} + 23.6 \times 10^{-6} \times L \times 180 =$$

$$\frac{P \times L}{105 \times 10^3 \times \frac{\pi}{4} (25)^2} + 20.9 \times 10^{-6} \times L \times 180$$

$$\rightarrow 25.52 \times 10^{-6} P = 0.486 \rightarrow P = 19.05 \times 10^3 \text{ N} = \underline{19.05 \text{ kN}}$$

$$\ast \sigma_a = -\frac{P}{A_a} = -\frac{19.05 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} (60^2 - 25^2)} = \underline{-8.15 \text{ MPa}} \quad \text{تنش در بریده آکسونی}$$

$$\ast \sigma_b = \frac{P}{A_b} = \frac{19.05 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} \times 25^2} = \underline{38.8 \text{ MPa}} \quad \text{تنش در هسته برنجی}$$

$$\ast \delta = \delta_a = \delta_b = \left(\frac{PL}{EA}\right)_b + (\alpha L \Delta T)_b = \left(\frac{19050}{105 \times 10^3 \times \frac{\pi}{4} \times 25^2} + 20.9 \times 10^{-6} \times 180\right) L$$

$$= (3.697 \times 10^{-4} + 37.6 \times 10^{-4}) \times L = \underline{41.3 \times 10^{-4} L} \quad \text{تغییر طول میل}$$