

دانشگاه سواد

مقاومت مصالح

مبحث چهارم:

خمش

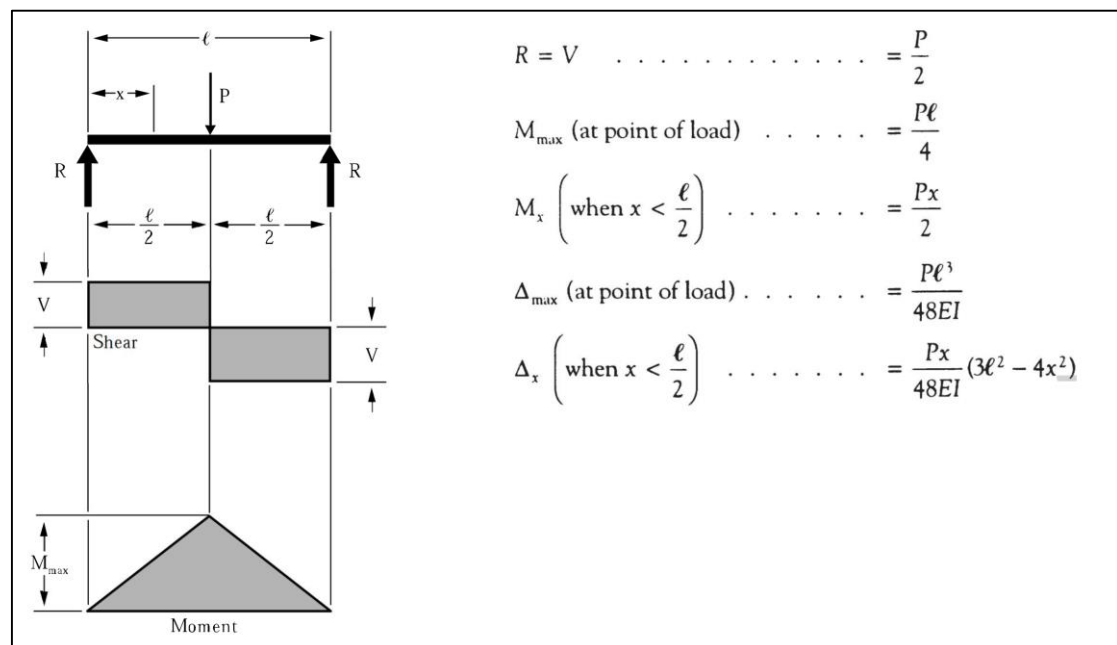
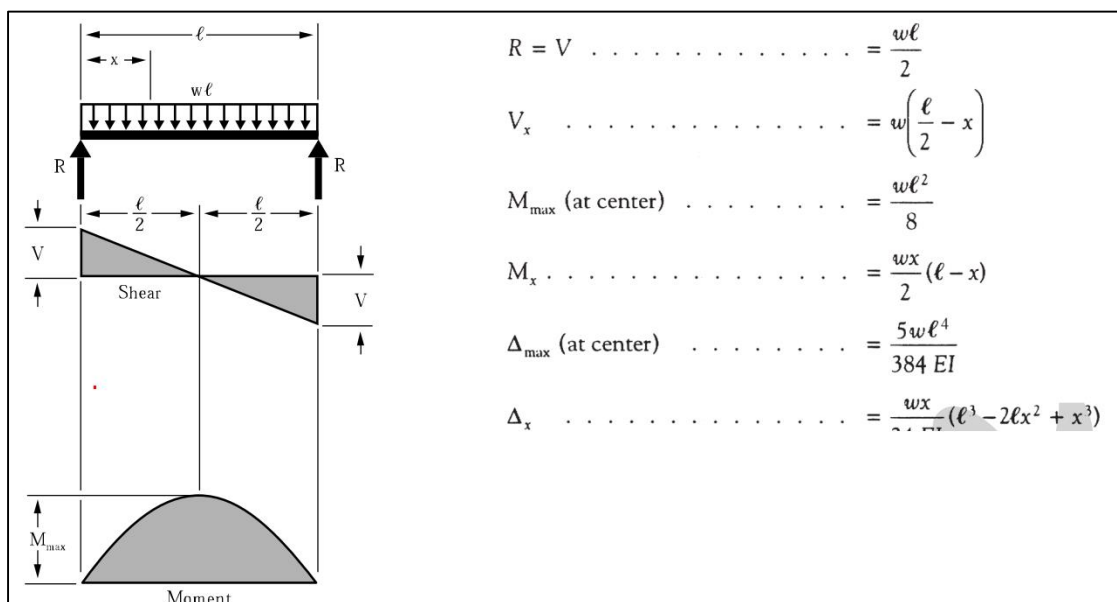
مدرس: دکتر محمد رضا میرجلیلی

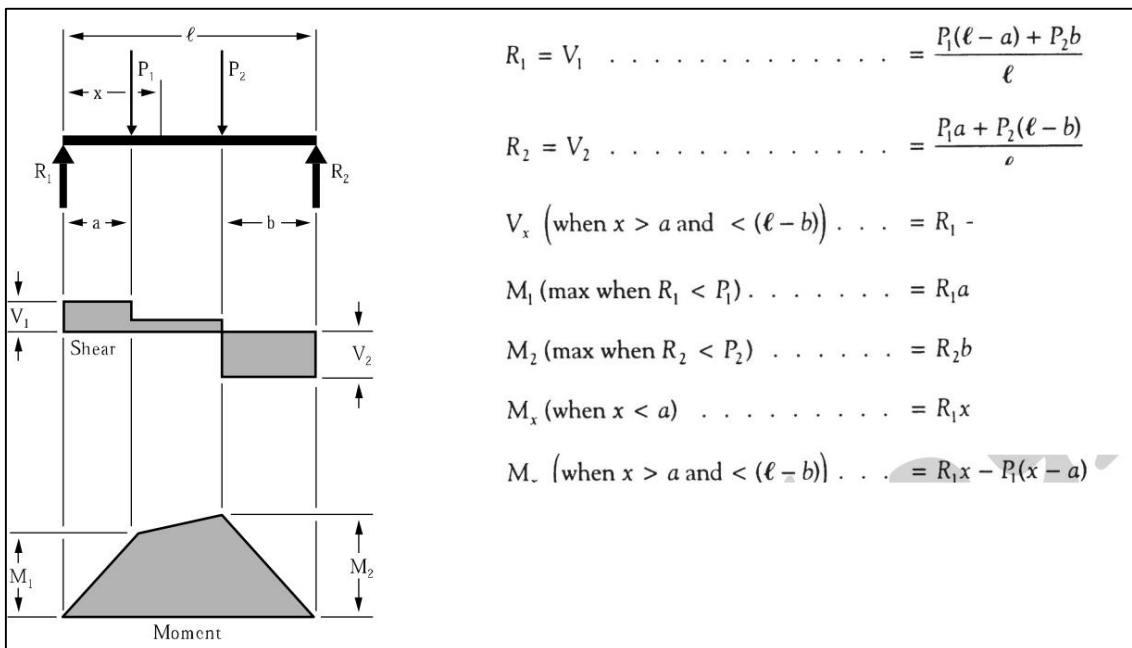
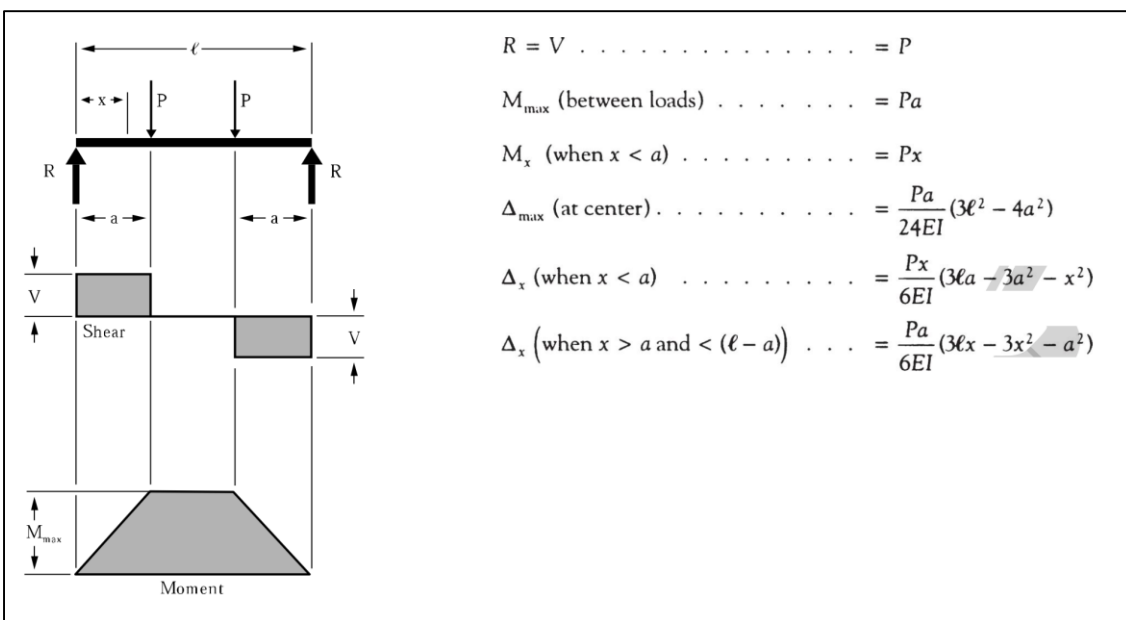
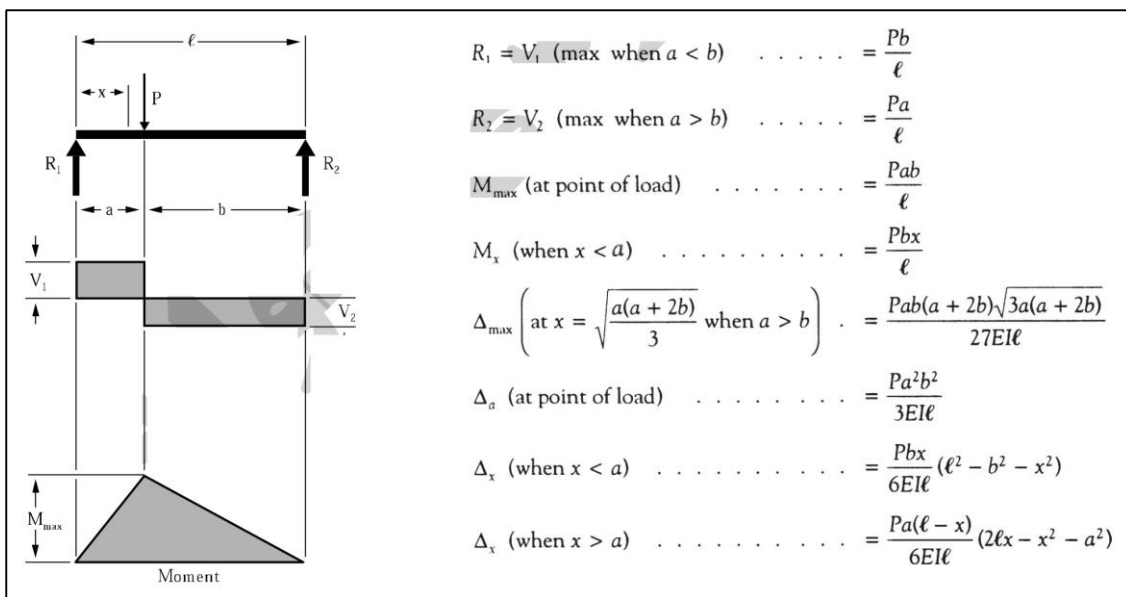


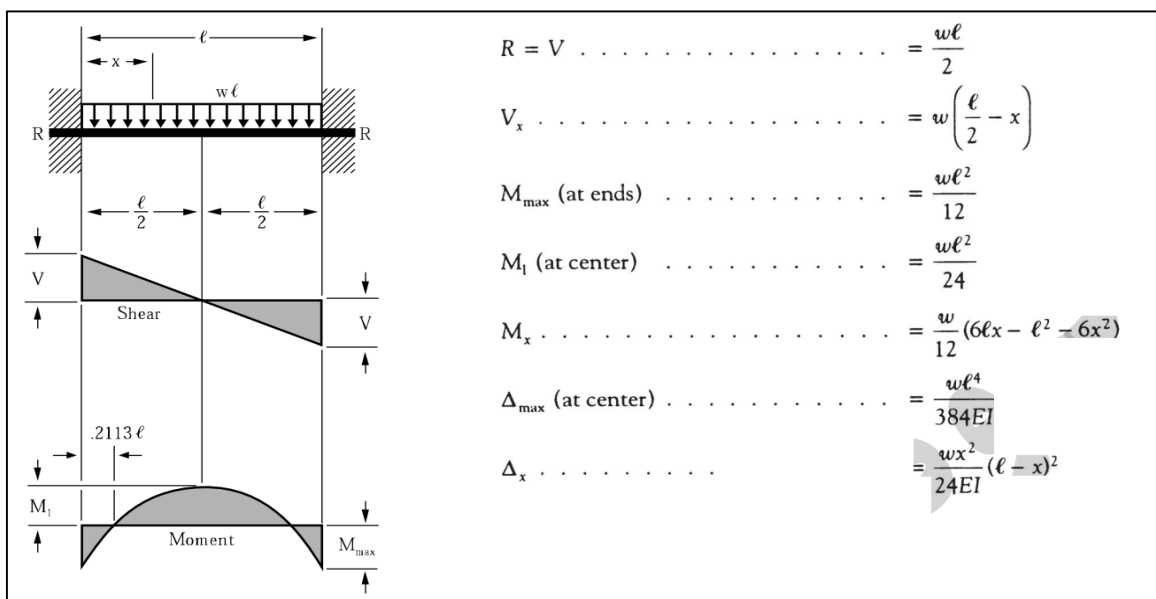
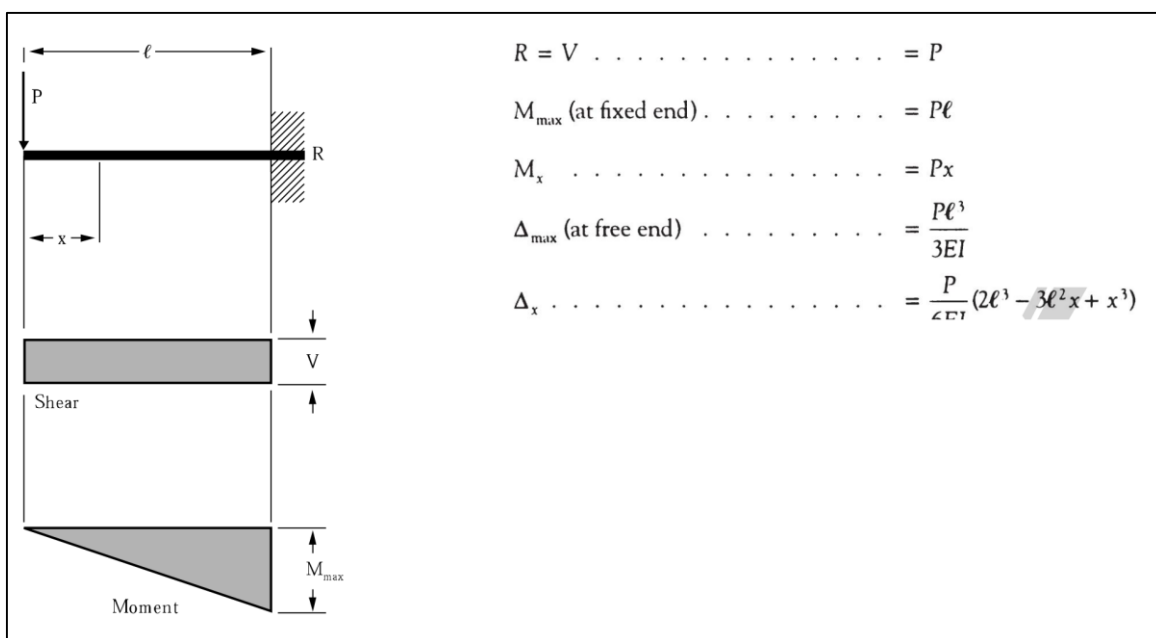
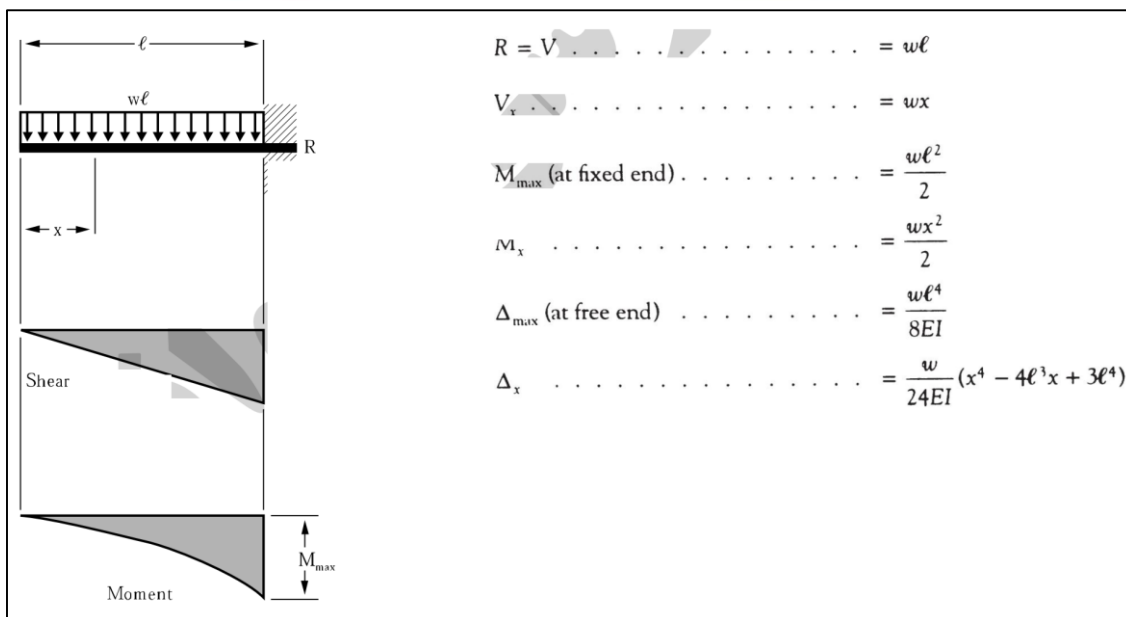
یادآوری: دیاگرام برش و خمش در تیرها

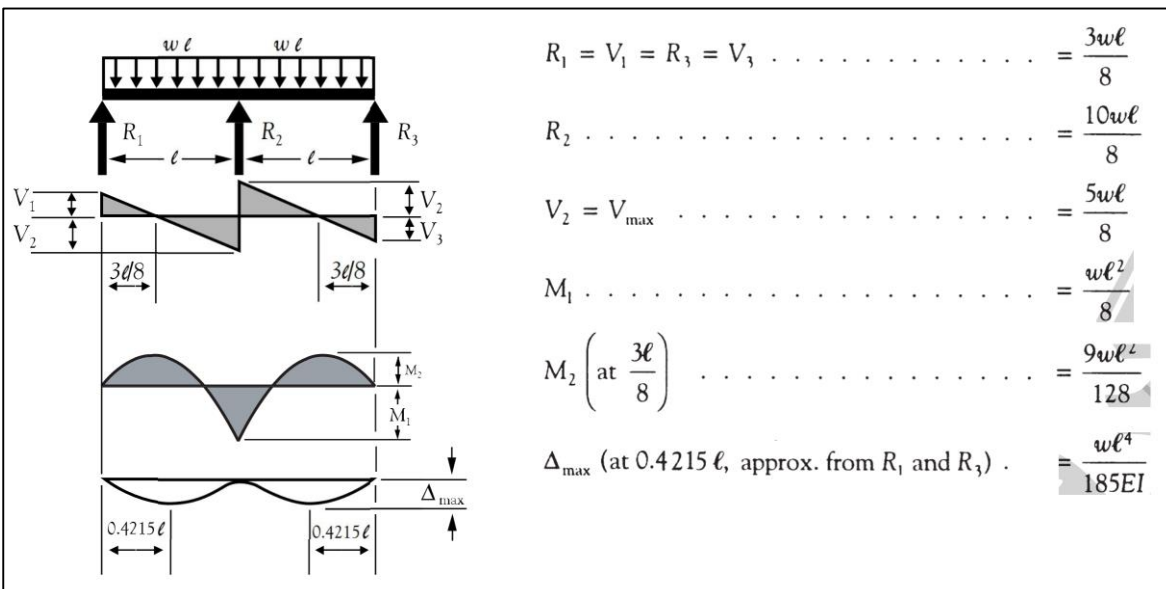
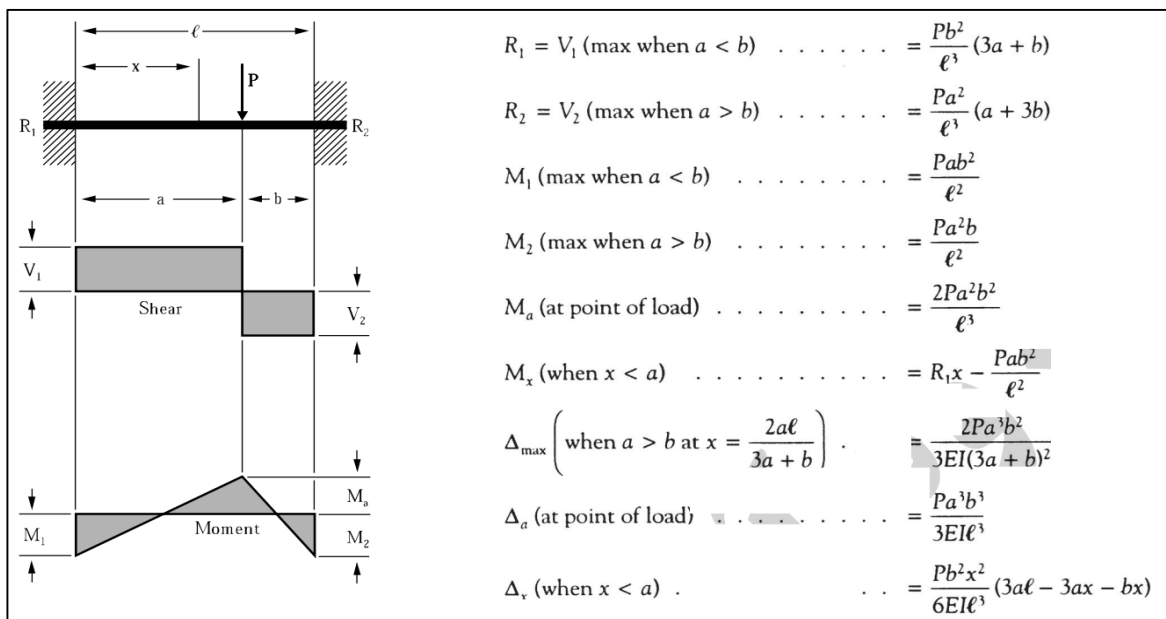
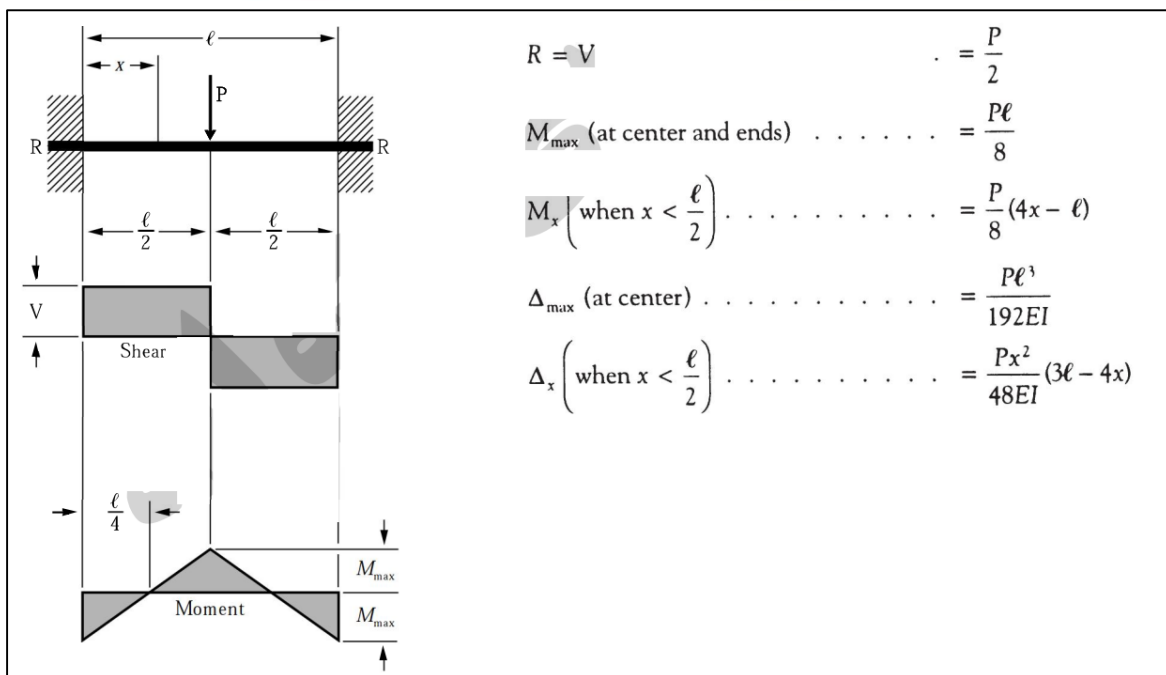
Load	0	0	Constant	0	Constant	Linear
Shear	Constant	Constant	Linear	Constant	Linear	Parabolic
Moment	Linear	Linear	Parabolic	Linear	Parabolic	Cubic

mycivil.ir









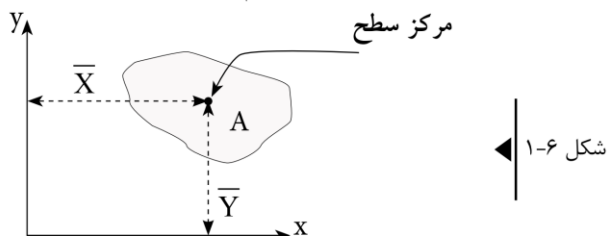


یادآوری: مشخصات مقطع (مرکز سطح، ممان اینرسی)

گشتاور اول سطح (ممان استاتیک)

حاصلضرب مساحت در فاصله مرکز سطح تا محور مورد نظر.

در شکل زیر با توجه به تعریف داریم:



شکل ۶-۱

$$Q_x = \int y dA = \bar{Y} \cdot A \quad \text{گشتاور اول سطح A نسبت به محور x}$$

$$Q_y = \int x dA = \bar{X} \cdot A \quad \text{گشتاور اول سطح A نسبت به محور y}$$

در روابط فوق $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ مختصات مرکز سطح A می باشند.

به منظور محاسبه گشتاور اول سطوح مرکب، آن‌ها را به سطوح هندسی ساده تجزیه نموده و ممان استاتیک هر یک از آن‌ها را نسبت به محورهای مورد نظر محاسبه و با یکدیگر جمع جبری می نماییم. یعنی:

$$Q_x = \sum_{i=1}^n A_i \bar{y}_i$$

$$Q_y = \sum_{i=1}^n A_i \bar{x}_i$$

مرکز سطح

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{A} \quad \bar{x} = \frac{\int x dA}{A}$$

مرکز سطح مقاطع مرکب

برای محاسبه مرکز سطح سطوح مرکب با توجه به این که گشتاور اول کل سطح با مجموع گشتاورهای اول اجزای سطح مرکب با هم برابرند می توان نوشت:

$$\left. \begin{aligned} Q_y &= A\bar{X} \\ Q_y &= \sum_{i=1}^n A_i \bar{x}_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow A\bar{X} = \sum_{i=1}^n A_i \bar{x}_i \Rightarrow \bar{X} = \frac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i}$$

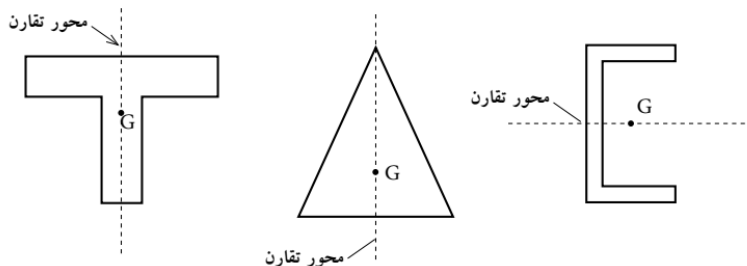
$$\left. \begin{aligned} Q_x &= A\bar{Y} \\ Q_x &= \sum_{i=1}^n A_i \bar{y}_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow A\bar{Y} = \sum_{i=1}^n A_i \bar{y}_i \Rightarrow \bar{Y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} \quad (۳-۶)$$

در روابط فوق $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ مختصات مرکز سطح مرکب مورد نظر می باشند که نسبت به محورهای مختصات دلخواه تعیین می شوند.



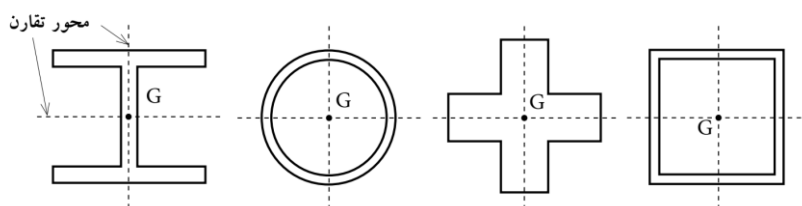
اگر سطح دارای یک محور تقارن باشد، مرکز سطح روی آن محور خواهد بود.

شکل (۳-۶)



هرگاه سطح دارای دو محور تقارن باشد مرکز سطح در محل تلاقی آن دو محور خواهد

بود. شکل (۴-۶)



گشتاور دوم سطح (ممان اینرسی)

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA$$

گشتاور دوم سطح یا ممان اینرسی عامل مقاوم در مقابل خمش می باشد و به توزیع ذرات تشکیل دهنده جسم حول محور خمش بستگی دارد.

ممان اینرسی را با نماد I نشان داده و نسبت به محورهای مختلف با اندیس آن محور

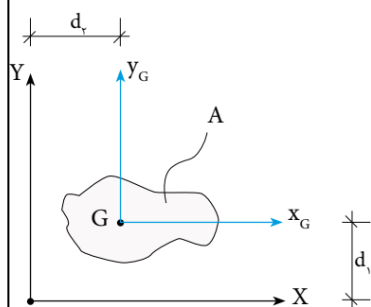
نام گذاری می شود. به عنوان مثال، I_x یعنی ممان اینرسی نسبت به محور x .

واحد ممان اینرسی، طول به توان ۴ یعنی cm^4 یا mm^4 و ... می باشد.

ممان اینرسی حول محور موازی (قضیه محورهای موازی)

روابط بالا، ممان اینرسی حول محورهای گذرنده از مرکز سطح را محاسبه می کنند. برای محاسبه ممان اینرسی

نسبت به محور موازی در فاصله d از محور گذرنده از مرکز سطح، از روابط زیر استفاده می شود.



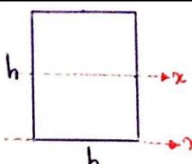
ممان اینرسی یک سطح نسبت به محورهایی که موازی با محورهای مرکزی آن سطح می باشند، برابر است با ممان اینرسی آن سطح نسبت به محورهای مرکزی به اضافه حاصل ضرب مساحت در مجذور فاصله محور مورد نظر تا مرکز سطح.

یعنی:

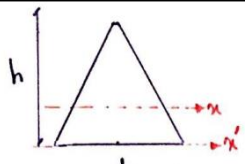
$$\begin{aligned} I_x &= I_{x_G} + Ad_y^2 \\ I_y &= I_{y_G} + Ad_x^2 \end{aligned} \quad (۴-۶)$$



1. Rectangle $A = bh$ $\bar{y} = \frac{h}{2}$ $\bar{x} = \frac{b}{2}$ $I_{x'} = \frac{bh^3}{3}$ $I_{y'} = \frac{hb^3}{3}$	6. Circle $A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$ $I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$
2. Right Triangle $A = \frac{bh}{2}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$ $\bar{x} = \frac{b}{3}$ $I_{x'} = \frac{bh^3}{12}$ $I_{y'} = \frac{hb^3}{12}$	7. Hollow Circle $A = \pi(R^2 - r^2) = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$ $I_x = I_y = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4) = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$
3. Triangle $A = \frac{bh}{2}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$ $\bar{x} = \frac{(a+b)}{3}$ $I_{x'} = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{bh}{36}(a^2 - ab + b^2)$	8. Parabola $y' = \frac{h}{b^2}x'^2$ $A = \frac{2bh}{3}$ $\bar{x} = \frac{3b}{8}$ $\bar{y} = \frac{3h}{5}$

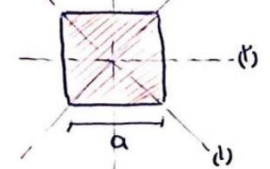


$$I_{x'} = \frac{bh^3}{12} + (bh)(\frac{b}{2})^2 = \frac{bh^3}{12}$$

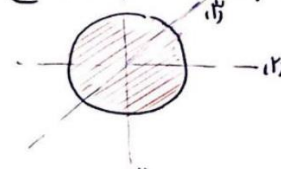


$$I_{x'} = \frac{bh^3}{36} + (\frac{bh}{4})(\frac{h}{3})^2 = \frac{bh^3}{36}$$

نکته: در موارد زیر، تمام محورها عبوری از مرکز دلای (مابین این دو می باشد)

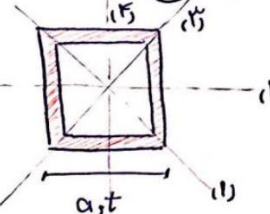


$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = \frac{a^4}{12}$$



$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = \frac{\pi R^4}{4}$$

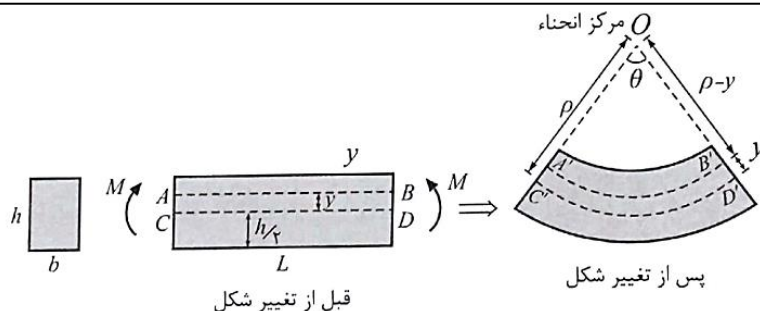
۲- ضلع ششم جدار نازک: ضخامت ثابت (شکل متساوی الاضلاع، مربع، ... دایره)



$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = \frac{1}{12} t a^4$$



تنش ناشی از خمش خالص در تیر



۱- قبل از اعمال لنگر خمشی به تیر، تارهای AB و CD با یکدیگر برابرند. $AB=CD=L$

۲- بعد از اعمال لنگر، تیر خم می شود. بدین صورت که تقوی به سمت بالا می یابند. در این حالت، تارهای فوقانی کوتاه تر شده (در فشار قرار می گیرند) و تارهای تحتانی بلندتر می شوند (کشیده می شوند).

۳- از طرفی در این میانه، یک تار وجود دارد که نه کشیده می شود و نه فشرده. به این تار اصطلاحاً تار خنثی می گویند. ($NA: Neutral Axis$).

۴- فرض کنید که تار CD در شکل فوق، تار خنثی است. پس بعد از خمش هم بهین تغییر طول باقی خواهد ماند.
 $C'D' = CD = L$

۵- این دهانی است که تار AB پس از خمش کوتاه می شود. $A'B' < AB$

۶- طول تارهای $A'B'$ و $C'D'$ را می توان به صورت کمانی از زاویه θ نشان داد:

$$A'B' = \text{زادیه کمان} \times \text{شعاع}$$

۷- اگر شعاع تار خنثی ρ باشد، شعاع تار $A'B'$ که به اندازه y بالاتر از تار خنثی است برابر خواهد بود با $(\rho - y)$. پس:

$$C'D' = \rho \theta$$

$$A'B' = (\rho - y) \theta$$

۸- از طرفی چون $C'D' = CD$ است، پس: $C'D' = CD \rightarrow \rho \theta = L$

۹- تار AB پس از خمش کوتاه، فشرده می‌شود. کرنش ایجاد شده در این تار

برابر است با: $\epsilon_{A'B'} = \frac{\Delta_{AB}}{L_{AB}} = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{(P-y)\theta - L}{L}$

$L = P\theta \rightarrow \epsilon_{A'B'} = \frac{(P-y)\theta - P\theta}{P\theta} = -\frac{y}{P} \rightarrow \boxed{\epsilon_{A'B'} = -\frac{y}{P}}$

۱۰- پس برای y ها مثبت (بالای تارخشی)، کرنش متفی است و برای y ها متفی (زیر تارخشی) کرنش مثبت است.

۱۱- نتیجه دیگر از رابطه $\epsilon = -\frac{y}{P}$ این است که هرچه از تارخشی فاصله می‌گیریم، دوری شویم، کرنش ایجاد شده در تارها بیرونی افزایش می‌یابد.

۱۲- در روی تارخشی ($y=0$)، کرنش صفر است.

۱۳- قرارداد ما این است که در خمش مثبت که تقریباً به سمت بالا است، M مثبت است و در تقریباً به سمت پایین (خمش متفی)، M متفی است.

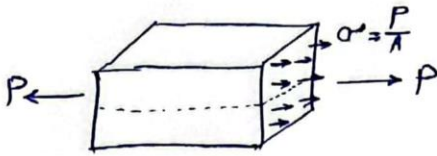
پس این که تقسیم در تارهای بالای تارخشی فشار و در تارهای پایین کشش ایجاد می‌شود، برای خمش مثبت است. در خمش متفی برعکس است.



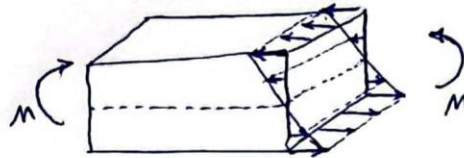


توزیع تنش در مقطع تحت لنگر خمشی خالص

هدف اصلی ما این است که تنش ایجاد شده ناشی از لنگر خمشی در یک مقطع را بیابیم.
 یعنی می‌خواهیم یک رابطه بین تنش (σ) و لنگر خمشی (M) پیدا کنیم.
 برای این کار ابتدا توزیع تنش در کرنش تاها یک مقطع را بررسی می‌کنیم.

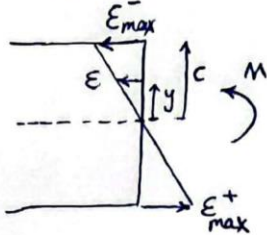


توزیع یکنواخت تنش محوری در عضو تحت نیروی محوری



توزیع غیر یکنواخت تنش در عضو تحت لنگر خمشی

از رابطه $\epsilon = -\frac{y}{\rho}$ می‌فهمیم که توزیع کرنش در تاها به ناصله گنجا از تا خمشی ارتباط خطی دارد.

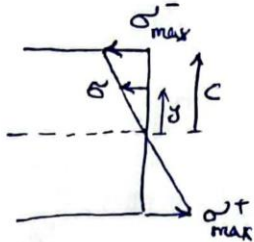


$$\epsilon = -\frac{y}{\rho}$$

$$\epsilon_{max} = -\frac{c}{\rho}$$

$$\epsilon = \frac{y}{c} \cdot \epsilon_{max} \rightarrow \text{یعنی رابطه توزیع کرنش نسبت به c خطی است.}$$

از طرفی طبق رابطه هوک، $\sigma = E \cdot \epsilon$ پس،



$$\sigma = \frac{y}{\rho} E$$

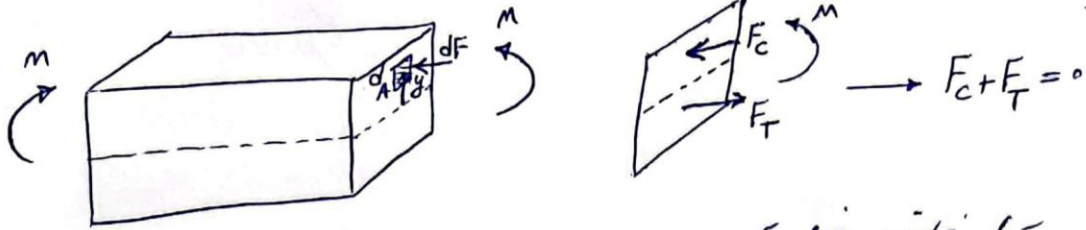
$$\sigma_{max} = -\frac{c}{\rho} E$$

$$\sigma = \frac{y}{c} \sigma_{max}$$

* طبق رابطه فوق هرچه از تا خمشی ناصله بگیریم ریبتم تاها بر روی یکدست تنش اثراتش می‌یابیم.
 بیشتر تنش در دورترین تا نسبت به تا خمشی ایجاد می‌گردد.
 مدبره منی که اگر در استیر در تنش فشاری یا کششی ناشی از خمشی از پایی در کشید، شروع
 این غرابی از تاها بر روی خواهد بود.



تار خشی کجاست؟



چون مقطع تحت خمش قرار دارد، بنابراین نیروی محوری ایجاد شده در کل مقطع صفر است. پس مجموع نیروهای فشاری بالای تار خشی و نیروی کششی زیر تار خشی صفر است. نیروی ایجاد شده در یک واحد dA برابر است با:

$$dF = \sigma \cdot dA$$

فرض کنید σ در ماده y از تار خشی فرضی قرار دارد.

$$\int_A dF = 0 \rightarrow \int_A \sigma \cdot dA = 0 \rightarrow \int_A \frac{y}{c} \cdot \sigma_{max} \cdot dA = 0$$

$$\frac{\sigma_{max}}{c} \int_A y \cdot dA = 0 \rightarrow \int_A y \cdot dA = 0 \quad (\text{لنگر اول سطح})$$

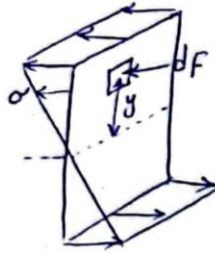
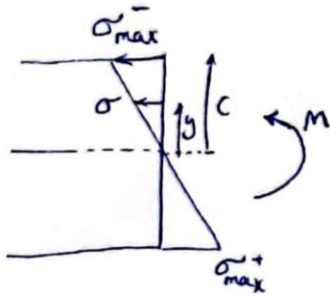
را یکم فوق می‌گوید که $\int_A y \cdot dA$ حول تار خشی صفر است. از طرفی می‌دانیم که $\int_A y \cdot dA$ نسبت به مرکز سطح نیز برابر صفر است. $(\bar{y} = \frac{\int y \cdot dA}{\int dA} = 0)$.
نتیجه این که تار خشی روی تار مرکز سطح مقطع قرار دارد.

پس برابر می‌سازیم موقعیت تار خشی، کافی است که مرکز سطح مقطع را می‌سازیم. برای این کار ابتدا یک محور مرجع اولیه انتخاب می‌کنیم و سپس از رابطه زیر $\bar{y}$ را نسبت به آن محاسبه می‌کنیم.

$$\bar{y} = \frac{\int y \cdot dA}{\int dA} \quad \text{یا} \quad \bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$



محاسبه تنش ناشی از لنگر خمشی



$$dM = y \cdot dF$$

$$M = \int_A y \cdot dF = \int_A y \cdot \sigma \cdot dA$$

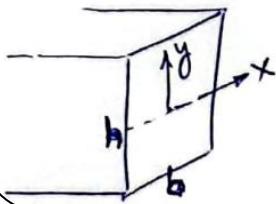
$$M = \int_A y \cdot \frac{y}{c} \sigma_{max} \cdot dA$$

$$M = \frac{\sigma_{max}}{c} \int_A y^2 dA = \frac{\sigma_{max}}{c} \cdot I \rightarrow \sigma_{max} = \frac{M c}{I}$$

گردد در سطح حول محور آهسته

تنش در تار با فاصله y از تار آهسته .
در y ها مثبت ، تنش منفی است در y ها منفی ، تنش مثبت است .

$$\sigma = -\frac{M \cdot y}{I}$$



I ، مان اینرسی مقطع حول تار آهسته است .

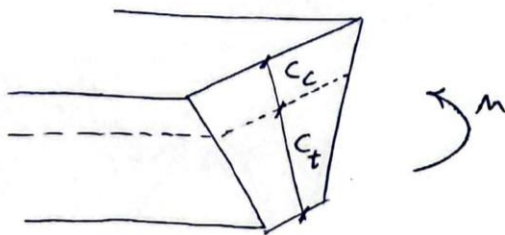
$$I = I_x = \frac{1}{12} b h^3$$

تنش در مقاطع غیر متقارن

در تار طبعی که مرکز سطح در وسط قرار گرفته است ، فاصله در تارین تاروفشاری دگشی از تار آهسته با یکدیگر متساوی است . در این صورت تنش ها متساوی تر نامیده می شوند .

$$|\sigma_{max}^c| = \frac{M c_c}{I} \quad , \quad |\sigma_{max}^t| = \frac{M c_t}{I}$$

: c compression تار
: t tension کشش



c_c ، فاصله در تارین تاروفشاری از تار آهسته

c_t ، فاصله در تارین تاروفشاری از تار آهسته

σ_{max}^c : بیشترین تنش فشاری

σ_{max}^t : بیشترین تنش کششی



بیان تنش خمشی بر حسب مدول مقطع

$$\sigma_{max} = \frac{MC}{I} = \frac{M}{(I/C)} = \frac{M}{S} \rightarrow \boxed{\sigma_{max} = \frac{M}{S}}$$

S : مدول مقطع (اراس مقطع)، mm^3 ($S = \frac{I}{C}$)

لنگر خمشی مجاز (مقاومت خمشی مجاز)

$$\sigma_{max} = \frac{MC}{I} \leq \sigma_{all} \rightarrow M_{all} = \frac{\sigma_{all} \cdot I}{C} \quad \text{یا} \quad M_{all} = \sigma_{all} \cdot S$$

در مواردی که مقطع نامتقارن نسبت به محور خمشی باشد، تنش نواحی مجاز در فشار و کشش متفاوت باشد، باید کمترین مقدار لنگر خمشی مجاز را در نظر بگیریم. در درین حالت، کشش استوار گردد.

$$M_1 = \frac{\sigma_{all,c} \cdot I}{C_c}, \quad M_2 = \frac{\sigma_{all,t} \cdot I}{C_t}, \quad M_{all} = \min(M_1, M_2)$$

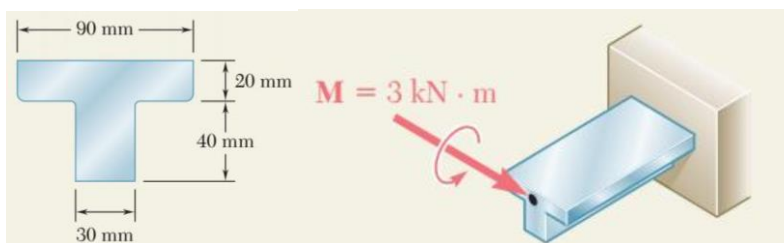
$\sigma_{all,c}$: تنش مجاز مصالح در فشار، $\sigma_{all,t}$: تنش مجاز مصالح در کشش
 C_c : فاصله دورترین تار فشاری از N.A.، C_t : فاصله دورترین تار کششی از N.A.

لنگر خمشی مجاز یا مقاومت خمشی مجاز، بُدترین لنگر مجاز مابین لنگرهای مجاز در فشار و کشش است.



مثال ۱-

گتر ۳۰۰۰ م به تیرچه زیر دارد می کشد. حداکثر تنش فشاری در گسترش سطح را محاسبه کنید.



$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i} = \frac{50 \times (90 \times 20) + 20 (40 \times 30)}{(90 \times 20) + (40 \times 30)} = 38 \text{ mm}$$

$$I = \sum (\bar{I} + A d^2) = \frac{1}{12} \times 90 \times 20^3 + (90 \times 20) \times 12^2 + \frac{1}{12} \times 30 \times 40^3 + (40 \times 30) \times 18^2 = 868,000 \text{ mm}^4$$

تغییر در طول به علت یابین است. بفرم گتر خمشی منفرجه می باشد.

$$C_t = 22 \text{ mm}$$

$$C_c = 38 \text{ mm}$$

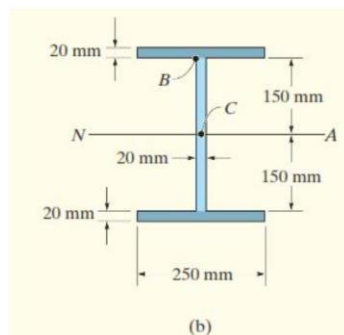
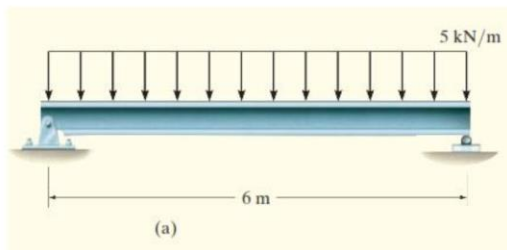
نیروی در تار فوقانی در گسترش در تار تحتانی در فشار است.

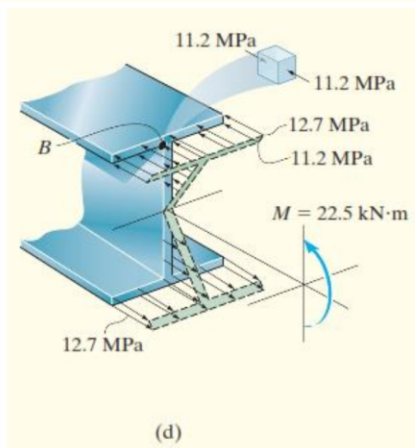
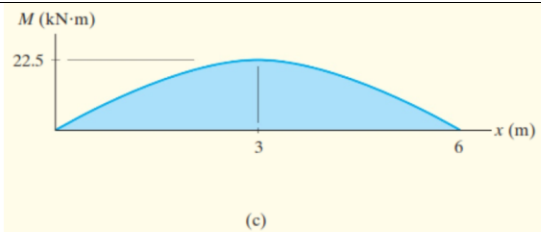
$$\sigma_{max}^t = \frac{M C_t}{I} = \frac{3 \times 10^5 (\text{N} \cdot \text{mm}) \times 22 (\text{mm})}{868,000 (\text{mm}^4)} = 76 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} (\text{MPa})$$

$$\sigma_{max}^c = \frac{M C_c}{I} = \frac{3 \times 10^5 (\text{N} \cdot \text{mm}) \times 38 (\text{mm})}{868,000 (\text{mm}^4)} = -131.3 \text{ MPa}$$

مثال ۲

تیر ساده نشان داده شده در شکل (a) دارای مقطع مطابق شکل (b) است. حداکثر تنش خمشی مطلق را در تیر به دست آورید و توزیع تنش روی سطح مقطع را در این موقعیت ترسیم کنید. همچنین، تنش در نقطه B را تعیین کنید.





حل:

حداکثر لنگر خمشی داخلی: با توجه به نمودار لنگر خمشی تیر، معلوم می‌شود که لنگر خمشی ماکزیمم در وسط دهانه و برابر است با: $M = 22.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$

ممان اینرسی مقطع: به دلیل تقارن مقطع تیر، محور خنثی، از مرکز سطح مقطع که در وسط ارتفاع آن قرار دارد، عبور می‌کند.

برای تقارن، مرکز خنثی در سطح تقارن قرار دارد.

$$I = \sum (\bar{I} + A\bar{d}^2) = \frac{1}{12} \times 20 \times 300^3 + 2 \left(\frac{1}{12} \times 250 \times 20^3 + 250 \times 20 \times 160^2 \right) = 301,300,000 \text{ mm}^4$$

تنش ماکزیمم:

$$\sigma_{\max} = \frac{MC}{I} = \frac{22.5 \times 10^5 (\text{N} \cdot \text{mm}) \times 170 (\text{mm})}{301.3 \times 10^6 (\text{mm}^4)} = 12.7 \text{ MPa}$$

تنش در نقطه B: به همین ترتیب، با قرار دادن y نقطه B در فرمول خمش، تنش در آن نقطه حاصل می‌شود.

$$\sigma_B = - \frac{My}{I} = - \frac{22.5 \times 10^5 \times 150}{301.3 \times 10^6} = -11.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = \frac{y}{c} \sigma_{\max} = \frac{150}{170} \times 12.7 = 11.2 \text{ MPa} \quad \text{فشاری}$$

تمرین: مسائل شماره ۴،۱۴، ۴،۱۹، ۴،۱۸، ۴،۱۶، ۴،۴، ۴،۳، ۴،۱۰

خمش و نیروی محوری در قسمتی از مقطع

سهم قسمتی از مقطع از لنگر خمشی کل وارد بر مقطع

در یک مقطع پیوسته تحت اثر لنگر خمشی M ، لنگر خمشی تحمل شده در هر قسمت با EI برای آن قسمت نسبت به محور خنثی متناسب است و لنگر خمشی تحمل شده توسط قسمت i ام عبارت است از:

$$M_i = \frac{I_i}{I} M$$

I : ممان اینرسی کل مقطع

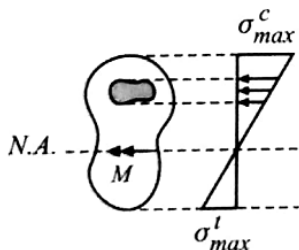
I_i : ممان اینرسی قسمت i ام نسبت به محور خنثی

بنابراین اگر جنس مقطع تغییر نکند، لنگر خمشی در هر قسمت با ممان اینرسی آن قسمت نسبت به محور خنثی متناسب است.



مقدار نیروی محوری حاصل از لنگر خمشی وارد بر قسمتی از مقطع

مقطع زیر تحت اثر لنگر خمشی M قرار داشته و این لنگر تنش‌های نرمال فشاری را بر قسمت هاشورخورده وارد می‌کند. برآیند این تنش‌ها تشکیل یک نیروی محوری را داده و مقدار نیرو برای المانی با مساحت dA و همچنین برای کل این سطح عبارت است از:



$$dF = \sigma dA \Rightarrow F = \int_A \sigma dA$$

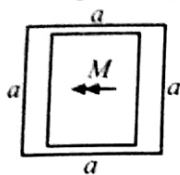
با قرار دادن اندازه تنش در رابطه فوق، اندازه نیرو به دست آمده و داریم:

$$\begin{cases} |\sigma| = \frac{My}{I} \\ F = \int_A \sigma dA \end{cases} \Rightarrow F = \frac{M}{I} \int_A y dA \Rightarrow \boxed{F = \frac{MQ}{I}} \quad (11-14)$$

دقت شود که انتگرال $\int_A y dA$ برابر ممان استاتیکی سطح هاشورخورده نسبت به محور خنثی می‌باشد.

مثال ۳

تمرین ۱-۲-۳ در مقطع همگن و جدار نازک زیر، ضخامت قسمت‌های قائم سه برابر قسمت‌های افقی می‌باشد:
(الف) چه کسری از لنگر خمشی در قسمت‌های افقی تحمل می‌شود؟
(ب) نیروی وارد بر یکی از قسمت‌های افقی را به دست آورید.



هله

(الف)

$$M_i = \frac{I_i}{I} M$$

$$I = \left(\frac{1}{12} (a+t) a^3 \right) \times 2 + \left(\frac{1}{12} \times a (t^3) + (at) \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right) \times 2$$

$$\rightarrow I = t a^3$$

$$I_i = 2 \times \left[\frac{1}{12} a t^3 + (at) \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] = \frac{t a^3}{2}$$

$$\rightarrow M_i = \frac{\frac{t a^3}{2}}{t a^3} M = \frac{1}{2} M$$

$$F_i = \frac{M Q_i}{I}$$

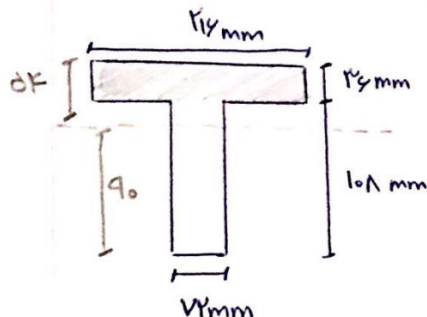
(ب)

$$\left. \begin{aligned} Q_i &= (at) \left(\frac{a}{2} \right) = \frac{t a^2}{2} \\ I &= t a^3 \end{aligned} \right\} \rightarrow F_i = \frac{M \times \frac{t a^2}{2}}{t a^3} = \frac{1}{2} \frac{M}{a}$$



مثال ۴

مثال) به تیری که در سطح مقطع آن نشان داده شده (ست) 6 kN.m گشتاور خمشی وارد می شود و آن را حول محور افقی ای خم می کند. کل تیر در بال بالایی تیر را تعیین کنید.



$$\bar{y}_{M.A} = \frac{108 \times 72 \times 54 + 112 \times 26 \times 172}{108 \times 72 + 112 \times 26} = 90$$

$$I = \frac{1}{12} \times 72 \times 108^3 + 72 \times 108 \times (40 - 54)^2 + \frac{1}{12} \times 112 \times 26^3 + 112 \times 26 \times (172 - 40)^2$$

$$\rightarrow I = 28150 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$F = \frac{M \cdot Q}{I} = \frac{6 \times 10^3 (\text{N.m}) \times 274496 (\text{mm}^3)}{28150 \times 10^4 (\text{mm}^4)} = 58955 \text{ N} = 58.955 \text{ kN}$$

$$Q = 112 \times 26 \times (54 - 18) = 274496 \text{ mm}^3$$

خمش در مقاطع مرکب (کامپوزیت)

خمش در اعضای با مقطع مرکب غیر یکپارچه

مقاطعی که از روی هم گذاشتن چند قطعه بدون اتصال به یکدیگر حاصل می شوند، غیر یکپارچه نام دارند. در این مقاطع هر قسمت به صورت مجزا عمل کرده و محور خمشی برای هر قسمت مجزا، از مرکز سطح همان قسمت عبور می کند. این موضوع بدین معناست که در مقطع محور خنثای واحد وجود ندارد. برای محاسبه تنش حداکثر در این حالت، مراحل زیر را طی می کنیم:

۱- ابتدا لنگر خمشی تحمل شده توسط هر قسمت را به دست می آوریم. لنگر خمشی در بین قسمت های مختلف با تقریب مناسبی به نسبت صلیبیت خمشی EI توزیع می شود. دقت شود که در این حالت، I_i ممان اینرسی قسمت i ام نسبت به محور خنثای در خودش می باشد.

(۱۹-۴)

$$M_i = \frac{E_i I_i}{\sum E_i I_i} \times M$$

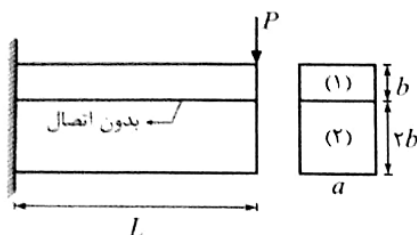
۲- با به دست آوردن سهم لنگر برای هر قسمت، با کمک رابطه $\sigma_{max} = \frac{M}{S}$ تنش حداکثر در هر قسمت را به دست می آوریم.

پس از تعیین سهم لنگر هر قطعه، تنش خمشی حداکثر در هر قطعه مستقلاً محاسبه می شود.

$$\sigma_{max,i} = \frac{M_i C_i}{I_i}$$



مثال ۵



تمرین ۳-۴۴ در شکل مقابل دو قطعه چوب هم جنس با تنش مجاز σ_{all} بدون اتصال بر روی هم قرار گرفته و نیروی متمرکز P بر انتهای آنها وارد می شود:
الف) حداکثر تنش خمشی در هر قسمت را به دست آورید.
ب) مقاومت خمشی مقطع و حداکثر مقدار مجاز بار P را به دست آورید.

حل:

الف) ابتدا باید توجه شود در صورتی که در یک مقطع دلخواه از این تیر لنگر خمشی برابر M باشد، سهم هریک از قطعات از لنگر خمشی عبارت است از:

$$M_1 = \frac{E_1 I_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} M = \frac{E \times \frac{a \times b^3}{12}}{E \times \frac{a \times b^3}{12} + E \times \frac{a \times (2b)^3}{12}} \times M$$

$$M_1 = \frac{1}{9} M, \quad M_2 = \frac{8}{9} M$$

حداکثر تنش ایجاد شده در هر یک از مصالح در محل تکیه گاه رخ داده و مقدار آن عبارت است از:

$$\sigma_{max_1} = \frac{M_1}{S_1} = \frac{\frac{1}{9} M}{\frac{a \times b^2}{6}} = \frac{2}{3} \frac{M}{ab^2} \xrightarrow{M=PL} \sigma_{max_1} = \frac{2}{3} \frac{PL}{ab^2}$$

$$\sigma_{max_2} = \frac{M_2}{S_2} = \frac{\frac{8}{9} M}{\frac{a \times (2b)^2}{6}} = \frac{4}{3} \frac{M}{ab^2} \xrightarrow{M=PL} \sigma_{max_2} = \frac{4}{3} \frac{PL}{ab^2}$$

همان گونه که مشاهده می شود، در قطعه دوم تنش های بزرگتری ایجاد شده و در صورتی که نیروی P افزایش یابد، ابتدا قطعه قویتر به تنش مجاز σ_{all} می رسد.

ب) برای محاسبه ظرفیت خمشی با توجه به یکسان بودن تنش مجاز، باید حداکثر تنش ایجاد شده در دو قطعه را با σ_{all} مساوی قرار دهیم:

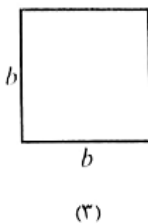
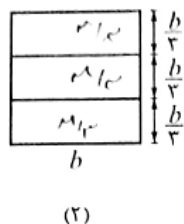
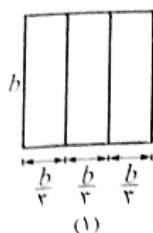
$$\sigma_{max_2} = \sigma_{all} \Rightarrow \frac{4}{3} \frac{M}{ab^2} = \sigma_{all} \Rightarrow M_{max} = \frac{3}{4} ab^2 \sigma_{all}$$

و حداکثر مقدار مجاز نیروی P با برابر قرار دادن لنگر مجاز مقطع با لنگر حداکثر تیر به دست می آید:

$$M_{max} = P_{max} \times L \Rightarrow P_{max} = \frac{M_{max}}{L} = \frac{3}{4} \frac{ab^2}{L} \sigma_{all}$$



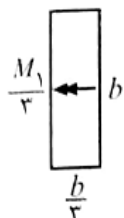
مثال ۶



تشریح: در شکل‌های مقابل، مقاطع جنس یکسانی داشته و تنش مجاز آنها برابر σ_{all} می‌باشد. در شکل‌های (۱) و (۲) مقاطع بدون هیچ گونه اتصالی در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند، مقاومت خمشی هر یک از مقاطع را حول محور افقی به دست آورید.

هله: در شکل‌های (۱) و (۲) با توجه به یکسان بودن قطعه‌ها، به هر یک از آنها لنگر خمشی $M \frac{1}{3}$ می‌رسد. با توجه به این موضوع به محاسبه مقاومت خمشی هر یک از قطعه‌ها می‌پردازیم:

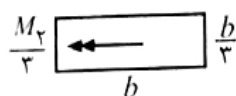
مقطع ۱: با در نظر گرفتن یکی از قطعه‌ها داریم:



$$\sigma_{max} = \sigma_{all}$$

$$\frac{\frac{M_1}{3}}{\frac{b}{3} \times \frac{h^2}{3}} = \sigma_{all} \Rightarrow M_1 = \frac{b^2}{6} \sigma_{all}$$

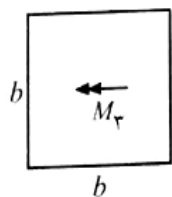
مقطع ۲: با در نظر گرفتن یکی از قطعه‌ها داریم:



$$\sigma_{max} = \sigma_{all}$$

$$\frac{\frac{M_2}{3}}{b \times \left(\frac{h}{3}\right)^2} = \sigma_{all} \Rightarrow M_2 = \frac{b^3}{18} \sigma_{all}$$

مقطع ۳: با در نظر گرفتن مقطع واحد و یکپارچه داریم:



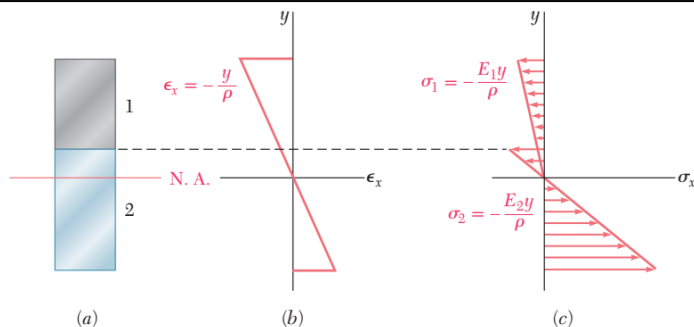
$$\frac{M_3}{\frac{b^3}{6}} = \sigma_{all} \Rightarrow M_3 = \frac{b^3}{6} \sigma_{all}$$

این سؤال نتایج زیر حاصل می‌شود:

۱- اگر پس از اتصال چند قطعه به یکدیگر، محل خمش تغییر نکند،



خمش در مقاطع مرکب یکپارچه



مقطع خمش خالص است، مجموع نیروی محوری دارد و مقطع متحرک است. $\sum F_x = 0$

$$\rightarrow \int \sigma dA = 0 \rightarrow \int_{A_1} \sigma dA + \int_{A_2} \sigma dA = 0$$

$$\int_{A_1} -E_1 \frac{y}{\rho} dA + \int_{A_2} -E_2 \frac{y}{\rho} dA = 0$$

$$-\frac{E_1}{\rho} \int_{A_1} y dA - \frac{E_2}{\rho} \int_{A_2} y dA = 0$$

$$E_2 = nE_1 \rightarrow -\frac{E_1}{\rho} \left(\int_{A_1} y dA + \int_{A_2} n y dA \right) = 0$$

باین معادله که در رابطه با مقطع، قسمت A_2 باید n برابر شود. $\int_{A_2} y (n dA)$



$$\rightarrow \bar{y} = \frac{\sum n_i A_i \bar{y}_i}{\sum n_i A_i}$$

طایفه اولت کردن اولی بخش و گذشتن و مقطع مرکب ، انتقال گذشتن و بخش یک ای دارند در مقطع استفاده می کنیم.

$$\sum M = 0 \rightarrow M = \int_A \sigma y dA$$

$$= \int_{A_1} \sigma y dA + \int_{A_2} \sigma y dA = \int_{A_1} -\epsilon_1 \frac{y}{\rho} y dA + \int_{A_2} -\epsilon_2 \frac{y}{\rho} y dA$$

$$= -\frac{\epsilon_1}{\rho} \left(\int_{A_1} y^2 dA + n \int_{A_2} y^2 dA \right)$$

$$= -\frac{\epsilon_1}{\rho} (I_1 + n I_2)$$

$$\rightarrow \bar{I} = \sum n_i I_i$$

پس از مشخص شدن $\bar{y}$ ، $\bar{I}$ ، تنش محوری ناش از خمش از روابط زیر بدست می آید.

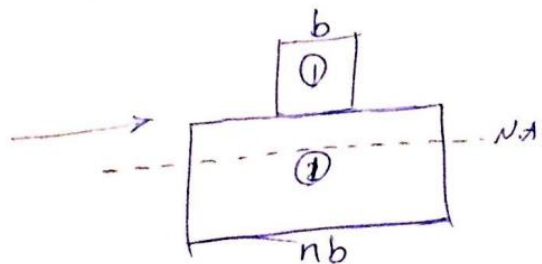
$$\sigma_i = n_i \frac{M y}{\bar{I}}$$

* روش مقطع معادل :

در قطعه ② که E_1 آن n برابر مقطع قطعه ① است ، $(\frac{E_2}{E_1} = n)$ ، حالت این n برابر نباید شود ، نابرابری می توان عرض مقطع را n برابر کرد ، n برابر کرد



مقطع اصلی



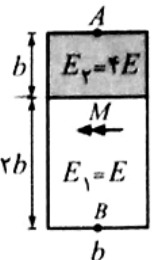
مقطع معادل هگن با E_1

در این حالت به جای استفاده از روابط $\bar{y}$ ، $\bar{I}$ ، می توان $\bar{y}$ و $\bar{I}$ از مقطع معادل هگن بدست آورد.



مثال ۷

تمرین ۳-۱۷: مقطع مرکب مقابل تحت اثر لنگر خمشی M حول محور افقی قرار دارد. تنش نرمال در نقاط A و B را به دست آورید.



هله اگر ماده (۱) را به عنوان ماده مبنا در نظر بگیریم، ضرایب همگنی و محل مرکز سطح مقطع مرکب عبارت است از:

$$n_1 = \frac{E_1}{E_1} = 1, \quad n_2 = \frac{E_2}{E_1} = \frac{4E}{E} = 4$$

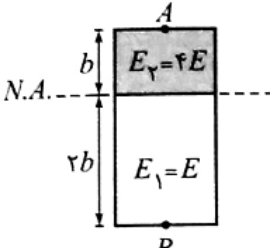
$$\bar{y} = \frac{\sum n_i A_i y_i}{\sum n_i A_i} = \frac{1 \times (2b \times b) \times b + 4 \times (b \times b) \times \frac{5}{2}b}{1 \times (2b \times b) + 4 \times (b \times b)} = 2b$$

این موضوع بدین معناست که محور خنثی در مرز دو ماده قرار می گیرد. در ادامه برای به دست آوردن تنش های قائم ناشی از خمش در نقاط A و B ، ممان اینرسی را نسبت به محور خنثی به دست می آوریم:

$$\bar{I} = \sum n_i I_i = n_1 I_1 + n_2 I_2 = 1 \times \left(\frac{b \times (2b)^3}{12} + A_1 d_1^2 \right) + 4 \times \left(\frac{b \times b^3}{12} + A_2 d_2^2 \right)$$

$$\bar{I} = 1 \times \left(\frac{b \times (2b)^3}{12} + (b \times 2b) \times (b)^2 \right) + 4 \times \left(\frac{b \times b^3}{12} + (b \times b) \times \left(\frac{1}{2}b \right)^2 \right) = 4b^4$$

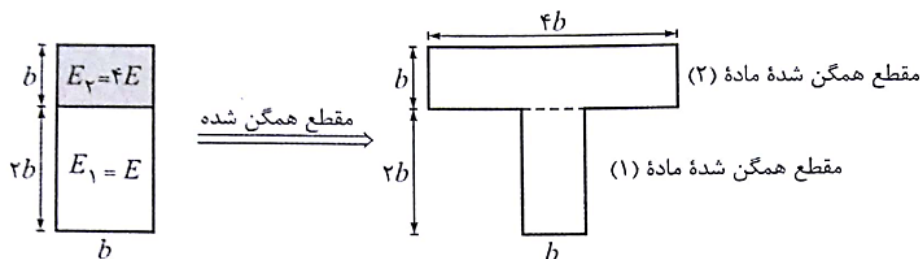
و در نهایت اندازه تنش در A و B عبارت است از:



$$|\sigma_A| = \left| n_2 \frac{M \cdot y_A}{\bar{I}} \right| = \left| 4 \times \frac{M \times b}{4b^4} \right| = \frac{M}{b^3} \quad (\text{فشاری})$$

$$|\sigma_B| = \left| n_1 \frac{M \cdot y_B}{\bar{I}} \right| = \left| 1 \times \frac{M \times 2b}{4b^4} \right| = \frac{M}{2b^3} \quad (\text{کششی})$$

روش دوم: روش مقطع معادل همگن شده



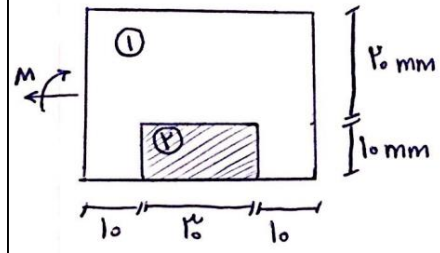


تمرین - مقطع مرکب خمشی

در مقطع مرکب روی بر، حداکثر تنش ایجاد شده در مقاطع فولادی و آلومینیومی را محاسبه کنید.
مقطع تحت خمش مثبت $M = 2 \text{ kN.m}$ قرار دارد.

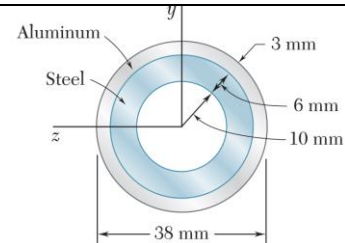
فولاد $E_r = 210 \text{ GPa}$ ، آلومینیم $E_a = 70 \text{ GPa}$

$\frac{E_{\text{فولاد}}}{E_{\text{آلومینیم}}} = \frac{210}{70} = 3$



تمرین - مقطع مرکب خمشی

A steel pipe and an aluminum pipe are securely bonded together to form the composite beam shown. The modulus of elasticity is 200 GPa for the steel and 70 GPa for the aluminum. Knowing that the composite beam is bent by a couple of moment 500 N · m, determine the maximum stress (a) in the aluminum, (b) in the steel.

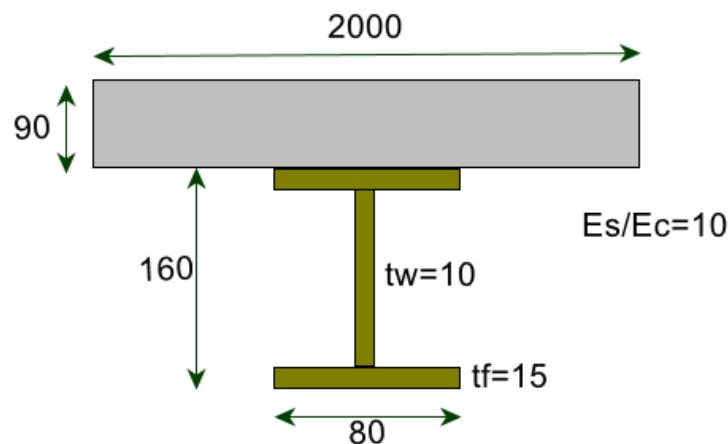


تمرین - تیر مرکب فولادی بتنی

تیر مرکب شامل مقطع I شکل فولادی و مقطع دال بتنی با مشخصات داده شده، تحت لنگر خمشی مثبت به مقدار $M = 600 \text{ kN.m}$ قرار دارد.

الف) مقدار تنش حداکثر در فولاد و بتن را محاسبه کنید.

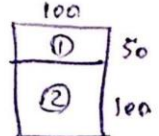
ب) اگر تنش مجاز فشاری در بتن 80 MPa و تنش مجاز کششی در فولاد 140 MPa باشد، مقاومت خمشی مقطع را به دست آورید.





تمرین - مقایسه تیر مرکب یکپارچه و غیر یکپارچه





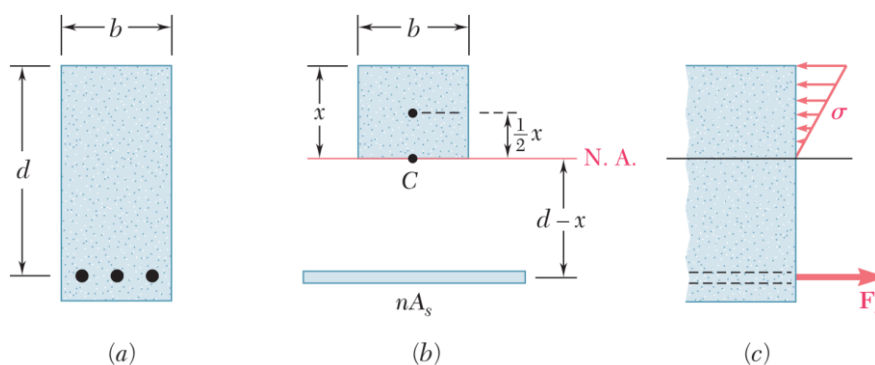
مقطع تیر (المان mm)

در تیر مرکب غیر یکپارچه اگر مقطع ۲ داریم باید مناسب به هم متصل شوند. نیروی مجاز P چقدر می شود؟

جنس ① $E_1 = 110 \text{ GPa}$ $\sigma_{all,c} = 60 \text{ MPa}$ $\sigma_{all,t} = 80 \text{ MPa}$	جنس ② $E_2 = 200 \text{ GPa}$ $\sigma'_{all,c} = \sigma'_{all,t} = 120 \text{ MPa}$
--	---

خمش در تیرهای بتن مسلح

تیرهای بتن مسلح جزو مقاطع مرکب (بتن و میلگرد) محسوب می شوند، با این تفاوت که بتن به دلیل مقاومت بسیار کم در مقابل کشش ترک می خورد و از این رو در این مقاطع، ناحیه زیر تار خنثی (ناحیه کششی) بدون بتن فرض می شود.

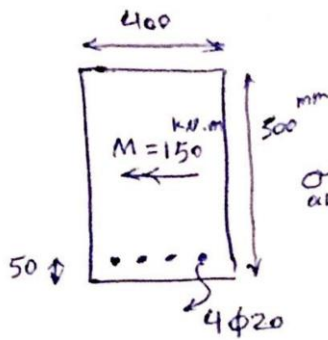


برای به دست آوردن تار خنثی، عمق ناحیه فشاری را x در نظر گرفته و از رابطه تعادل نیروی افقی برای مقطع همگن شده، مقدار آن را به دست می آوریم.

$$(bx) \frac{x}{2} - nA_s (d - x) = 0$$



مثال ۸



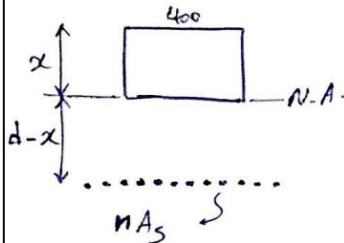
برای بررسی متادل چه ابعادی می آید؟

تنش مجاز فولاد $\sigma_{all,s} = 200$ MPa ، تنش مجاز بتن (درکشی) $\sigma_{all,c} = 80$ MPa

$$n = \frac{E_s}{E_c} = 8$$

$$A_s = 4 \times \left(\frac{1}{4} \times \pi \times 20^2 \right) = 1256 \text{ mm}^2$$

$$n = E_s / E_c = 8 \quad , \quad d = 500 - 50 = 450$$



$$400x \left(\frac{x}{2} \right) - n A_s (d - x) = 0$$

$$400x \left(\frac{x}{2} \right) - 8 \times 1256 (450 - x) = 0$$

$$200x^2 + 10,048x - 4,521,600 = 0$$

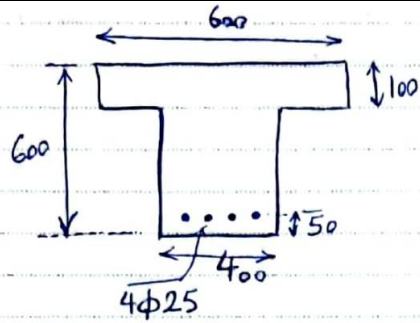
$$x = 127 \text{ mm}$$

$$I = \frac{1}{3} \times 400 \times 127^3 + 8 \times 1256 \times (450 - 127)^2 = 13 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_c = \frac{M c}{I} = \frac{M x}{I} = \frac{150 \times 10^6 (\text{N} \cdot \text{mm}) \times 127 \text{ mm}}{13 \times 10^8 \text{ mm}^4} = 14.6 \text{ MPa} < 80$$

$$\sigma_s = n \frac{M c_s}{I} = n \frac{M (d - x)}{I} = \frac{8 \times 150 \times 10^6 \times (450 - 127)}{13 \times 10^8} = 298 \text{ MPa} \quad ? / 200$$

نابرابر مسترد درگشت کشنده می شود.



مقاومت خمش مجاز (گندرنش مجاز) سطح
مقابل را محاسبه کنید.

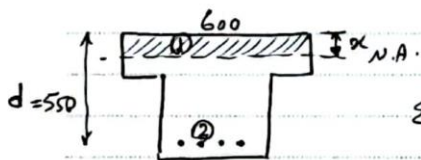
تنش مجاز بتن در فشار: $\sigma_{all,c} = 5 \text{ MPa}$

تنش مجاز فولاد در کشش: $\sigma_{all,s} = 200 \text{ MPa}$

$E_s = 200 \text{ GPa}$, $E_c = 25 \text{ GPa}$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{200}{25} = 8$$

$$A_s = 4 A_{\phi 25} = 4 \times \frac{1}{4} \pi \times 25^2 = 1962.5 \text{ mm}^2$$



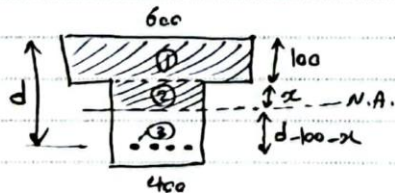
با فرض اینکه تاخشی در ناحیه بال تیر می افتد.

$$\sum Q = \sum A_i \bar{y}_i = 0$$

$$600 \times \left(\frac{x}{2}\right) - n A_s (d - x) = 0$$

$$600 \times \frac{x^2}{2} - 8 \times 1962.5 (550 - x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 145 \checkmark \\ x_2 = 199 \times \end{cases}$$

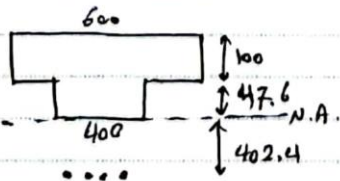
بنابراین $x = 145$ از سمت بال تیر است، بنابراین تاخشی در ناحیه واقع می شود.



$$\sum Q_i = \sum A_i \bar{y}_i = 0$$

$$600 \times 100 \times (x + 50) + 400 \times \left(\frac{x}{2}\right) - n A_s (d - 100 - x) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 47.6 \checkmark \\ x_2 = -426 \times \end{cases}$$



$$I = \left(\frac{600 \times 100^3}{12} + 600 \times 100 \times 97.6^2 \right) + \left(\frac{400 \times 47.6^3}{12} + 400 \times 47.6 \times \frac{47.6^2}{2} \right) + 8 \times 1962.5 \times 402.4^2$$

$$I = 621.5 \times 10^6 + 4 \times 10^6 + 2542 \times 10^6 = 3168 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{\text{تن}}^- = \frac{M c_c}{I} \leq \sigma_{all,c} \rightarrow M_{all,1} = \frac{\sigma_{all,c} \times I}{c_c} = \frac{5 \times 3168 \times 10^6}{147.6} = 107.3 \text{ kN.m}$$

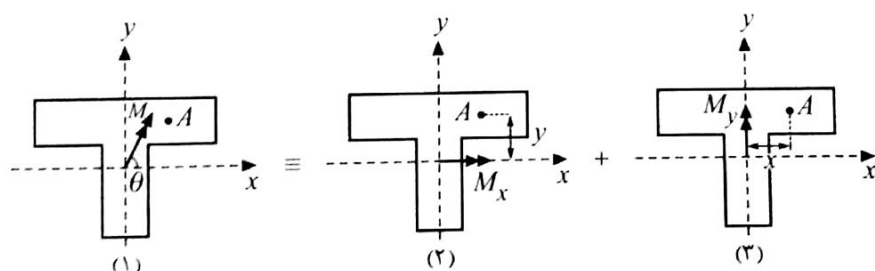
$$\sigma_{\text{فولاد}}^+ = \frac{M c_t}{I} \leq \sigma_{all,s} \rightarrow M_{all,2} = \frac{\sigma_{all,s} \times I \times n}{c_t} = \frac{200 \times 3168 \times 10^6 \times 8}{402.4 \times 8} = 196.8 \text{ kN.m}$$

$$M_{all} = 107.3 \text{ kN.m}$$

خمش دو محوره، ترکیب خمش و نیروی محوری

خمش دو محوره

اگر در یک مقطع محور خمش در راستای یکی از محورهای اصلی قرار نگیرد، مقطع تحت اثر خمش دو محوره یا خمش مرکب قرار گرفته است. در این حالت باید لنگر خمشی را در راستای محورهای اصلی x و y تجزیه کرده و تنش‌های ناشی از این لنگرها را به صورت جداگانه محاسبه کرد. در انتها با رعایت علامت تنش‌ها برای نقطه‌ای فرضی در ربع اول از اصل جمع آثار استفاده کرده و تنش‌های نرمال را به دست می‌آوریم.



با توجه به شکل‌های فوق و قانون دست راست در ابتدای فصل، برای بررسی رابطه محاسبه تنش نرمال، نقطه‌ای مانند A در ربع اول در نظر می‌گیریم. در این نقطه می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱- در شکل (۲)، لنگر M_x با توجه به قاعده دست راست نقطه A را کشیده و برای محاسبه تنش، ضریب آن با علامت مثبت در روابط وارد می‌شود.

$$\sigma_y = + \frac{M_x y}{I_x} = \frac{(M \cos \theta) \times y}{I_x}$$

۲- در شکل (۳)، لنگر M_y با توجه به قاعده دست راست نقطه A را تحت فشار قرار داده و برای محاسبه تنش ناشی از لنگر، ضریب آن با علامت منفی در روابط وارد می‌شود.

$$\sigma_z = - \frac{M_y x}{I_y} = - \frac{(M \sin \theta) \times x}{I_y}$$

۳- تنش در نقطه A از شکل (۱) با توجه به اصل جمع آثار عبارت است از:

$$\sigma = \sigma_y + \sigma_z \Rightarrow \sigma(x, y) = \frac{(M \cos \theta) \times y}{I_x} - \frac{(M \sin \theta) \times x}{I_y} \quad (۱۴-۲۰)$$



با توجه به رابطه (۴-۲۰)، می توان به نکات زیر اشاره کرد:

۱- در محل مرکز سطح مقطع، تنش نرمال ناشی از لنگر خمشی برابر صفر می باشد.
 $\sigma = 0 \Rightarrow (x = 0, y = 0)$

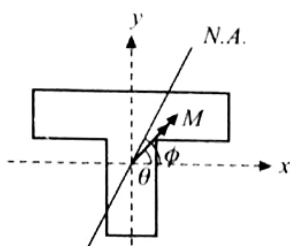
۲- برای مشخص کردن معادله محور خنثی، کافایت تنش نرمال را برابر صفر قرار دهیم:

$$\sigma(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{(M \cos \theta) \times y}{I_x} - \frac{(M \sin \theta) \times x}{I_y} = 0 \Rightarrow y = \left(\frac{I_x}{I_y} \tan \theta \right) \times x$$

همان گونه که مشخص است محور خنثی خط راستی است که مشابه با خمش یک محوره، از مرکز سطح مقطع عبور می کند.

$$\tan \phi = \frac{I_x}{I_y} \tan \theta$$

۳- شیب زاویه ای که محور خنثی با محور x ها می سازد عبارت است از:



۴- در صورتی که زوایای محور خمش و محور خنثی با یکی از محورهای اصلی مانند x را به ترتیب θ و ϕ فرض کنیم، نسبت $\tan \phi$ به $\tan \theta$ معادل با نسبت ممان اینرسی محورهای اصلی بوده و ممان اینرسی محوری که زاویه با آن سنجیده می شود، در صورت کسر ظاهر می شود.

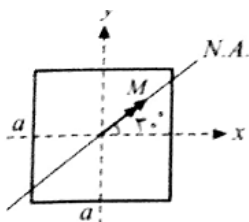
$$\frac{\tan \phi}{\tan \theta} = \frac{I_x}{I_y}$$

راستی که نمره این فرمول دارد

(۴-۲۱)

۵- محور خنثی همواره بین محور خمش و محور ضعیف قرار می گیرد. می توان این گونه تصور کرد که محور خنثی همان محور خمش است که با اندکی دوران، به سمت محور ضعیف متمایل شده است. دقت شود که بر طبق قرارداد معمولاً محور قوی را با x و محور ضعیف را با y نشان می دهیم.

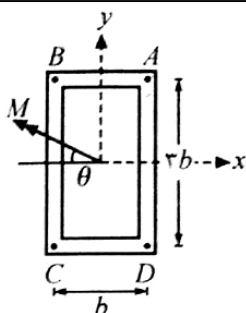
۶- در صورتی که $I_x = I_y$ شود، θ و ϕ با یکدیگر برابر شده و این موضوع بدین معناست که محور خمش و محور خنثی بر یکدیگر منطبق می شود. به عبارت دیگر، در این حالت خمش دو محوره به حالت خمش تک محوره یا خمش ساده تبدیل می شود.



۷- در یک n ضلعی منتظم، تمام محورهای مقطع محور اصلی محسوب شده و همواره محور خنثی و محور خمش بر یکدیگر منطبق است. به طور مثال در مربع مقابل، محور خنثی بر محور خمش منطبق بوده و با افق زاویه 30° درجه می سازد.

۸- راستای بار قائم و راستای محور خمش بر یکدیگر عمود است. به طور مثال در صورتی که بار قائم در راستای محور y باشد، محور خمش در راستای محور x واقع می شود.

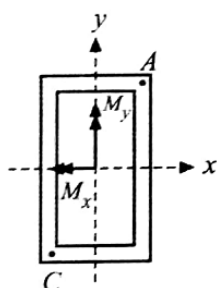
مثال ۱۰



تمرین ۳-۳: مقطع جدار نازک مقابل با ضخامت ثابت t را در نظر بگیرید.
 الف) در نقطه‌ای با مختصات (x, y) تنش نرمال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟
 ب) حداکثر تنش نرمال فشاری و کششی را به دست آورید.
 ج) زاویه θ را به گونه‌ای به دست آورید که حداکثر تنش نرمال ماکزیمم شود؟
 $(I_y = \frac{5}{3}tb^3 \text{ و } I_x = 9tb^3)$

هله

الف) با در نظر گرفتن نقطه‌ای واقع در ربع اول و با کمک قانون دست راست میزان تنش عبارت است از:



$$M_x \text{ از تنش ناشی از } : -\frac{M_x \times y}{I_x} = -\frac{(M \cos \theta) \times y}{I_x}$$

$$M_y \text{ از تنش ناشی از } : -\frac{M_y \times x}{I_y} = -\frac{(M \sin \theta) \times x}{I_y}$$

$$\sigma = -\frac{M \cos \theta \times y}{I_x} - \frac{M \sin \theta \times x}{I_y}$$

ب) حداکثر تنش فشاری در یکی از نقاط مرزی که مجموع دو عبارت ماکزیمم شود، رخ می‌دهد. با توجه به این موضوع، حداکثر تنش نرمال فشاری در نقطه A و حداکثر تنش نرمال کششی در نقطه C رخ می‌دهد.

$$A \text{ نقطه } : (x_A = 0.5b, y_A = 1.5b) \Rightarrow \sigma_A = -\frac{M \cos \theta \times 1.5b}{9tb^3} - \frac{M \sin \theta \times 0.5b}{\frac{5}{3}tb^3}$$

$$C \text{ نقطه } : (x_C = -0.5b, y_C = -1.5b) \Rightarrow \sigma_C = \frac{M \cos \theta \times 1.5b}{9tb^3} + \frac{M \sin \theta \times 0.5b}{\frac{5}{3}tb^3}$$

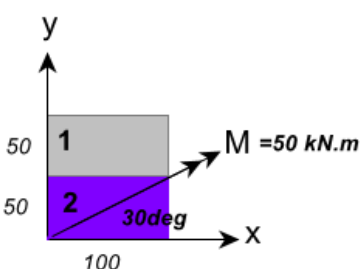
همان گونه که مشاهده می‌شود حداکثر تنش نرمال کششی و فشاری، اندازه یکسانی دارند.

ج) برای محاسبه زاویه θ در حالتی که تنش خمشی ماکزیمم مقدار را دارد، کافیست از تنش ماکزیمم نسبت به θ مشتق‌گیری کنیم:

$$\sigma_{max} = \frac{M \cos \theta}{6tb^2} + \frac{3M \sin \theta}{10tb^2}$$

$$\frac{d\sigma_{max}}{d\theta} = 0 \Rightarrow -\frac{M \sin \theta}{6tb^2} + \frac{3M \cos \theta}{10tb^2} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{6}\sin \theta + \frac{3}{10}\cos \theta = 0 \Rightarrow \tan \theta = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

تمرین - خمش دوجداره در مقطع مرکب



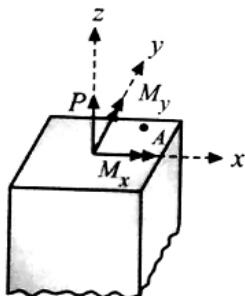
در مقطع مرکب نشان داده شده، نسبت ضریب ارتجاعی مصالح ۲ به ۱ برابر $n=3$ می‌باشد.

معادله توزیع تنش در مقطع و همچنین معادله تار خنثی را به دست آورید.



ترکیب نیروی محوری و لنگر خمشی

مقطعی مطابق شکل زیر، تحت اثر همزمان نیروی محوری P واقع در مرکز سطح و لنگرهای خمشی M_x و M_y قرار گرفته است. تنش در نقطه‌ای مانند A با کمک قانون دست راست عبارت است از:



$$(کششی) \quad \sigma_P = \frac{P}{A} = \text{تنش ناشی از نیروی } P$$

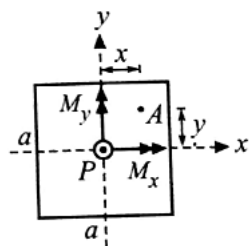
$$(کششی) \quad \sigma_{M_x} = + \frac{M_x y}{I_x} = \text{تنش ناشی از لنگر } M_x$$

$$(فشاری) \quad \sigma_{M_y} = - \frac{M_y x}{I_y} = \text{تنش ناشی از لنگر } M_y$$

$$\sigma_A = \frac{P}{A} + \frac{M_x y}{I_x} - \frac{M_y x}{I_y}$$

مثال ۱۱

تک‌محور z - y مربعی با ضلع a تحت اثر لنگرهای خمشی $M_x = M$ و $M_y = M$ به همراه نیروی محوری کششی $P = \frac{M}{a}$ قرار دارد:



(الف) تنش در نقطه A با مختصات (x, y) را به دست آورید.

(ب) تنش در مرکز سطح مربع را به دست آورید.

(ج) مقادیر تنش در چهار گوشه مربع را به دست آورید.

(د) معادله محور خنثی در مقطع را به دست آورید.

هله:

(الف) در نقطه‌ای با مختصات (x, y) واقع در ربع اول، تنش‌های ناشی از M_x و M_y با توجه به قانون دست راست و تنش ناشی از نیروی محوری P عبارت است از:

$$\left\{ \begin{array}{l} (کششی) \quad \sigma_P = \frac{P}{A} = \frac{M}{a^2} = \frac{M}{a^3} \\ (کششی) \quad \sigma_{M_x} = \frac{M_x y}{I_x} = \frac{My}{\frac{a^4}{12}} = \frac{12My}{a^4} \\ (فشاری) \quad \sigma_{M_y} = - \frac{M_y x}{I_y} = - \frac{Mx}{\frac{a^4}{12}} = - \frac{12Mx}{a^4} \end{array} \right. \Rightarrow \sigma_z = \frac{M}{a^3} + \frac{12My}{a^4} - \frac{12Mx}{a^4}$$

(ب) در مرکز سطح مربع تنش‌های قائم ناشی از لنگر خمشی M_x و M_y صفر بوده و تنش قائم ایجاد شده تنها ناشی از نیروی محوری می‌باشد.

$$\text{مرکز سطح: } \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \sigma_z = \frac{M}{a^3} \quad (کششی)$$

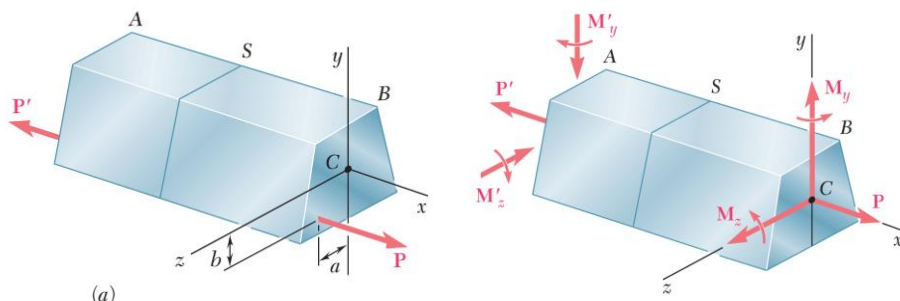


د) برای به دست آوردن معادله محور خنثی، کافی است تنش σ_z را برابر صفر قرار دهیم:

$$\sigma_z = \frac{M}{a^3} + \frac{12My}{a^4} - \frac{12Mx}{a^4} = 0 \Rightarrow y = x - \frac{a}{12}$$

همان گونه که مشاهده می شود با حضور نیروی محوری در مقطع، محور خنثی دیگر از مرکز سطح مقطع عبور نمی کند.

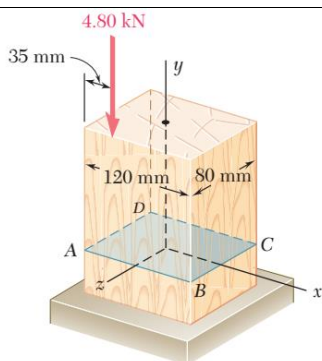
بارگذاری خارج از محور



$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

$$M_z = Pb, M_y = Pa$$

مثال ۱۲



درستون نشان داده شده، نیروی محوری $P=4.8 \text{ kN}$ در مرکزیت نشان داده شده. دارای شود. تنش در نقاط A, B, C, D را محاسبه کنید. مرکزیت تاخشی را هم دست آورید.

$$A = 80 \times 120 = 9600 \text{ mm}^2$$

$$I_x = \frac{1}{12} \times 120 \times 80^3 = 5,120,000 \text{ mm}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12} \times 80 \times 120^3 = 11,520,000 \text{ mm}^4$$

$$M_x = 4.8 \text{ (kN)} \times 40 \text{ (mm)} = 192,000 \text{ (N}\cdot\text{mm)}$$

$$M_z = 4.8 \text{ (kN)} \times (60 - 35) \text{ (mm)} = 120,000 \text{ (N}\cdot\text{mm)}$$

$$\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{M_x \cdot z}{I_x} + \frac{M_z \cdot x}{I_z}$$

$$\sigma = -\frac{4.8 \times 10^3 \text{ (N)}}{9600 \text{ (mm}^2)} - \frac{192,000 \times z}{5,120,000} + \frac{120,000 \times x}{11,520,000}$$

$$\sigma_{(x,z)} = -0.5 - 0.0375 z + 0.0104 x$$

$$\sigma_A = -0.5 - 1.5 - 0.625 = -2.625 \text{ MPa} \quad (-60, 40)$$

$$\sigma_B = -0.5 - 1.5 + 0.625 = -1.375 \text{ MPa} \quad (60, 40)$$

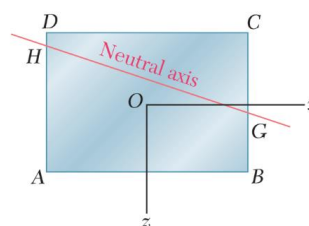
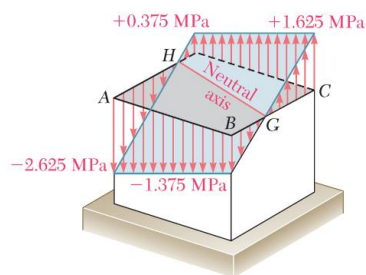
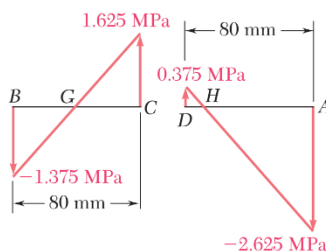
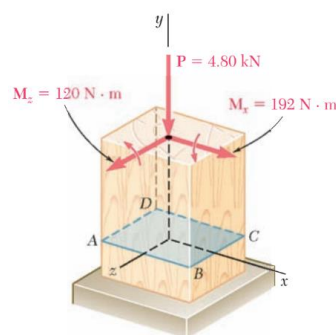
$$\sigma_C = -0.5 + 1.5 + 0.625 = 1.625 \text{ MPa} \quad (60, -40)$$

$$\sigma_D = -0.5 + 1.5 - 0.625 = 0.375 \text{ MPa} \quad (-60, -40)$$

مرکزیت تاخشی مکانی است که $\sigma = 0$

$$\sigma(x, z) = -0.5 - 0.0375 z + 0.0104 x = 0$$

$$z = 0.277 x - 13.33$$





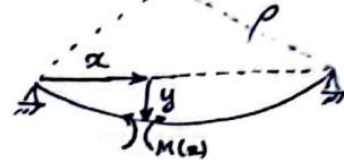
تغییر شکل خمشی

$$\epsilon = -\frac{y}{\rho}, \quad \epsilon_{max} = \frac{c}{\rho} \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_{max}}{c} \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_{max}}{E \cdot c} \quad (1)$$

$$\sigma_{max} = \frac{M \cdot c}{I} \quad (2) \rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} = K = \text{انحناء} \\ \rho = \text{شعاع انحناء} \end{array} \right.$$

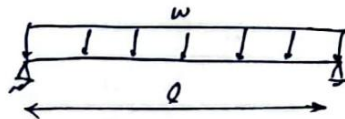
$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{رابطه انحنا با تغییر شکل عرضی (افت = y):}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}}$$

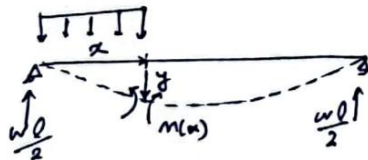


مثال ۱۳

تغییر شکل (افت) تیر در سراسر تحت بار یکنواخت w را محاسبه کنید.



$$M(x) = \frac{wl}{2}x - \frac{wx^2}{2}$$



$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left(\frac{wl}{2}x - \frac{wx^2}{2} \right)$$

$$\textcircled{1} \text{ معادله شیب} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left(\frac{wl}{4}x^2 - \frac{wx^3}{6} + C_1 \right)$$

$$\textcircled{2} \text{ معادله افت} \quad y = \frac{1}{EI} \left(\frac{wl}{12}x^3 - \frac{wx^4}{24} + C_1x + C_2 \right)$$

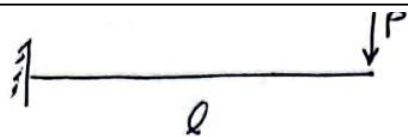
$$\text{شرایط مرزی:} \quad \left\{ \begin{array}{l} x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow C_2=0 \\ x=l \rightarrow y=0 \rightarrow \frac{wl^4}{12} - \frac{wl^4}{24} + C_1l + \frac{wl^4}{24} = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{wl^3}{24} \end{array} \right.$$

$$y = \frac{1}{EI} \left(\frac{wl}{12}x^3 - \frac{wl}{24}x^4 - \frac{wl}{24}x \right)$$

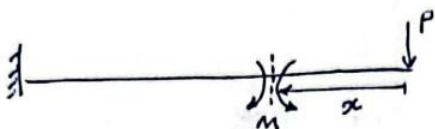
$$y_{max} \left(@ x = \frac{l}{2} \right) = \frac{5}{384} \frac{wl^4}{EI}$$



مثال ۱۴



تغییر شکل تیر طره متناهی را بدست آورید.



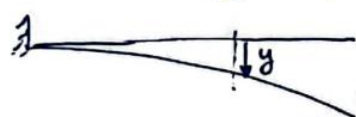
$$M(x) = P \cdot x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{EI} x$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{2EI} x^2 + C_1$$

معادله شیب ①



$$y = \frac{P}{6EI} x^3 + C_1 x + C_2$$

معادله انحراف ②

شرایط مرزی :

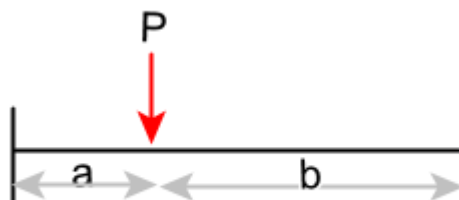
$$\begin{cases} x=l \rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 & \text{①} \rightarrow C_1 = -\frac{P}{2EI} l^2 \\ x=l \rightarrow y = 0 & \text{②} \rightarrow C_2 = -\frac{P}{6EI} l^3 + \frac{P}{2EI} l^3 = \frac{Pl^3}{3EI} \end{cases}$$

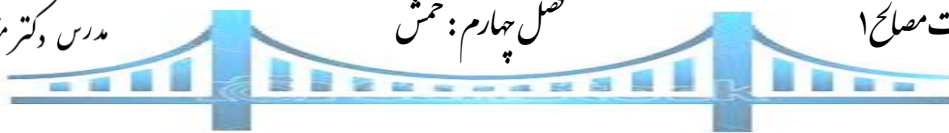
$$\rightarrow y = \frac{P}{6EI} x^3 - \frac{Pl^2}{2EI} x + \frac{Pl^3}{3EI}$$

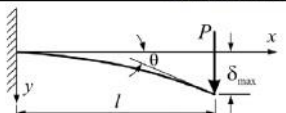
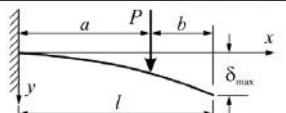
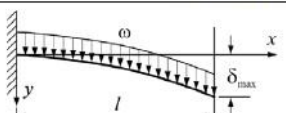
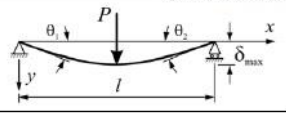
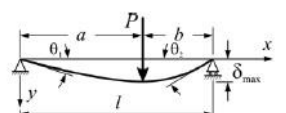
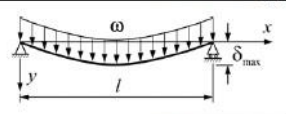
$$y_{max} (@ x=0) = \frac{Pl^3}{3EI}$$

تمرین - تغییر شکل خمشی

حداکثر تغییر شکل (افت) تیر طره زیر با سختی خمشی (EI) را بر حسب پارامترهای داده شده محاسبه کنید.





BEAM TYPE	SLOPE AT FREE END	DEFLECTION AT ANY SECTION IN TERMS OF x	MAXIMUM DEFLECTION
1. Cantilever Beam – Concentrated load P at the free end			
	$\theta = \frac{Pl^2}{2EI}$	$y = \frac{Px^2}{6EI}(3l-x)$	$\delta_{\max} = \frac{Pl^3}{3EI}$
2. Cantilever Beam – Concentrated load P at any point			
	$\theta = \frac{Pa^2}{2EI}$	$y = \frac{Px^2}{6EI}(3a-x)$ for $0 < x < a$ $y = \frac{Pa^2}{6EI}(3x-a)$ for $a < x < l$	$\delta_{\max} = \frac{Pa^2}{6EI}(3l-a)$
3. Cantilever Beam – Uniformly distributed load ω (N/m)			
	$\theta = \frac{\omega l^3}{6EI}$	$y = \frac{\omega x^2}{24EI}(x^2 + 6l^2 - 4lx)$	$\delta_{\max} = \frac{\omega l^4}{8EI}$
BEAM TYPE	SLOPE AT ENDS	DEFLECTION AT ANY SECTION IN TERMS OF x	MAXIMUM AND CENTER DEFLECTION
6. Beam Simply Supported at Ends – Concentrated load P at the center			
	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{Pl^2}{16EI}$	$y = \frac{Px}{12EI}\left(\frac{3l^2}{4} - x^2\right)$ for $0 < x < \frac{l}{2}$	$\delta_{\max} = \frac{Pl^3}{48EI}$
7. Beam Simply Supported at Ends – Concentrated load P at any point			
	$\theta_1 = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6lEI}$ $\theta_2 = \frac{Pab(2l - b)}{6lEI}$	$y = \frac{Pbx}{6lEI}(l^2 - x^2 - b^2)$ for $0 < x < a$ $y = \frac{Pb}{6lEI}\left[\frac{l}{b}(x-a)^3 + (l^2 - b^2)x - x^3\right]$ for $a < x < l$	$\delta_{\max} = \frac{Pb(l^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}lEI}$ at $x = \sqrt{(l^2 - b^2)}/3$ $\delta = \frac{Pb}{48EI}(3l^2 - 4b^2)$ at the center, if $a > b$
8. Beam Simply Supported at Ends – Uniformly distributed load ω (N/m)			
	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{\omega l^3}{24EI}$	$y = \frac{\omega x}{24EI}(l^3 - 2lx^2 + x^3)$	$\delta_{\max} = \frac{5\omega l^4}{384EI}$