

دانشگاه سواد

مقاومت مصالح

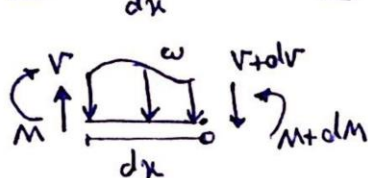
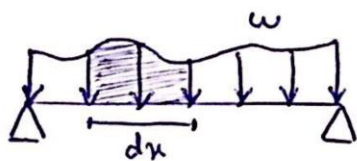
مبحث چهارم:

برش در تیرها

مدرس: دکتر محمد رضا میرجلیلی



۴-۱- برش در مقطع افقی تیر

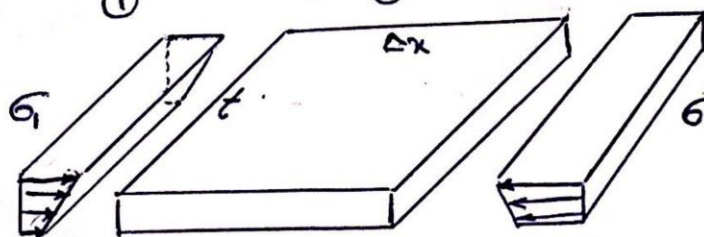
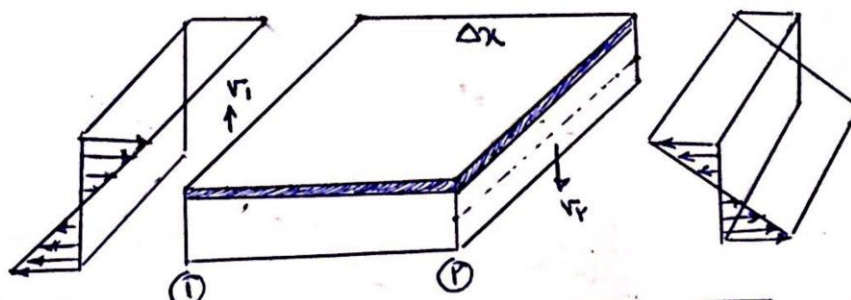
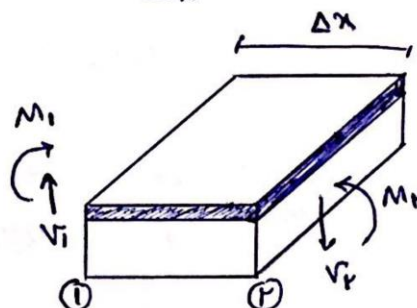
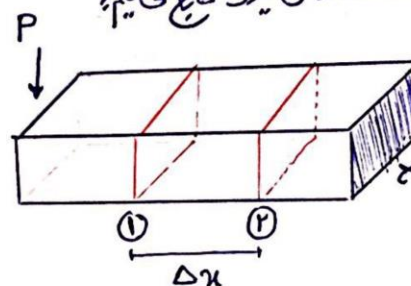
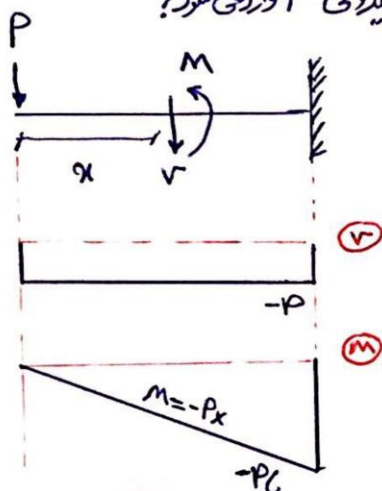


$$\rightarrow [\Sigma M_O = 0] \rightarrow -M - Vdx + wdx\left(\frac{dx}{2}\right) + M + dM = 0$$

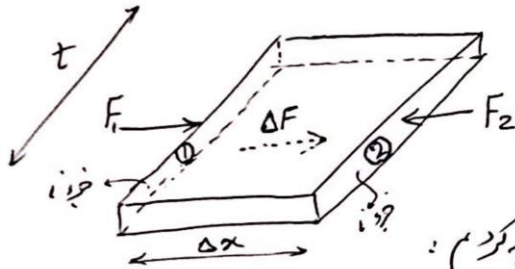
$$\rightarrow Vdx = dM \rightarrow V = \frac{dM}{dx}$$

$$\rightarrow M = \int V dx \rightarrow \Delta M = V \Delta x$$

حال فرض کنید تیر یک سر گیردار داشته باشیم که به سر آزاد آن، نیروی P وارد می شود؛
ما یک قسمت از دهن تیر را خارج می کنیم؛



ΔF



ΔF = نیروی برشی افقی در سطح برش خورده به
دیس افند F_1 , F_2

تبدل در فصل بخش، نیروی دارد بر فرقی از مقطع را محاسبه کردیم:

$$F = \frac{M Q_i}{I}$$

F = نیروی دارد بر فرقی از مقطع

Q_i = گسترده سطح فرقی نسبت به $N.A.$ (در این حالت سطح برش خورده بالا سطح فرقی است)

I = گسترده سطح (مانند اینرسی) کل مقطع نسبت به $N.A.$

$$\Delta F = F_2 - F_1 = \frac{M_2 Q_i}{I} - \frac{M_1 Q_i}{I} = \frac{\Delta M Q_i}{I} = \frac{(V \Delta x) Q_i}{I}$$

$$\rightarrow \Delta F = \frac{V Q_i}{I} \Delta x$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = q = \frac{V Q_i}{I}$$

$\frac{\Delta F}{\Delta x} = q$: جریا برش نامیده می شود که برابر نیروی برشی افقی در واحد طول عضو می باشد

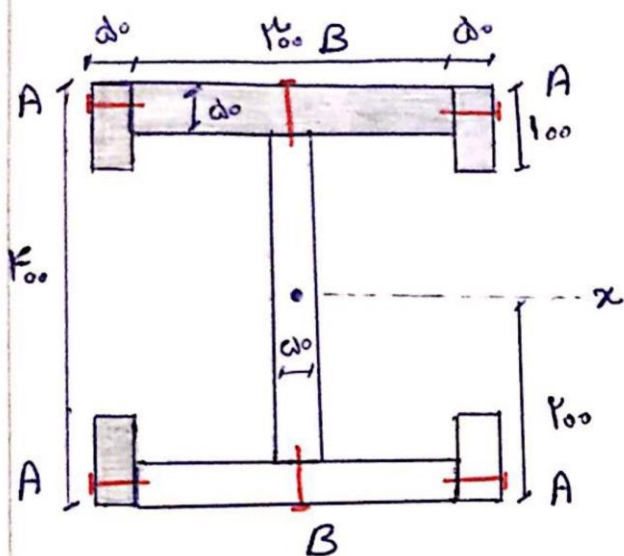
$$\tau = \frac{\Delta F}{A} = \frac{\Delta F}{\Delta x \times t} \rightarrow \boxed{\tau = \frac{V Q_i}{I t}}$$

سطح مقطع افقی برش

τ = تنش برشی افقی در سطح افقی سراز q_i از $N.A.$



مثال) پیرچربی مرکب شکل زیر تحت اثر 8 kN بیش از عری است. با این اطلاع که فاصله طری بین تیغ ها در A برابر با 60 mm و در B برابر با 150 mm است، نیروی بیش از تیغ (حرف الف) در A و B تعیین کنید. ($I_x = 1,504 \times 10^4 \text{ mm}^4$)



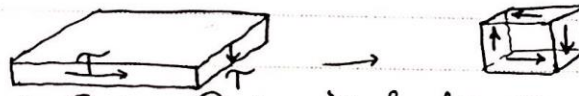
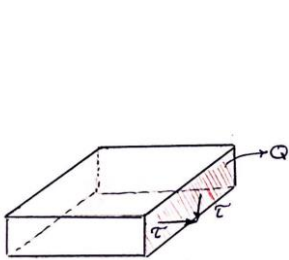
$$F_A = \frac{VQA}{I} \Delta x_A = \frac{1 \times 10^6 \times 100 \times 20 \times (100 - 20)}{1120 \times 10^4} \times 90$$

$$\rightarrow F_A = \mu q N$$

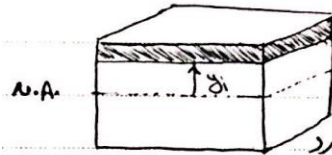
$$F_B = \frac{V_{QB}}{I} \Delta x_B = \frac{1 \times 10^{-10} (1 \times 100 \times 10^{-10} + 100 \times 10^{-10} (100 - 10))}{1 \times 10^{-10} \times 10^{-9}} \times 10$$

→ $F_B = 2 \text{ kg} \sim$

۴-۳- برش در سطح مقطع قائم تیر



طبق رابطه کوشش تنش برش افقی در صنفه (A) با تنش برشی قائم در صنفه (B) برابر است.

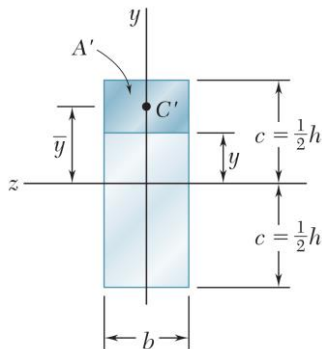


تنش برشی در مقطع قائم در موقعیت y از تارخشی

مباداین تنش برشی در مقطع قائم به مضقات y از nA بستگی دارد

زیرا با تغییر y، مقادیر Q و احتمالاً t تغییر می کند

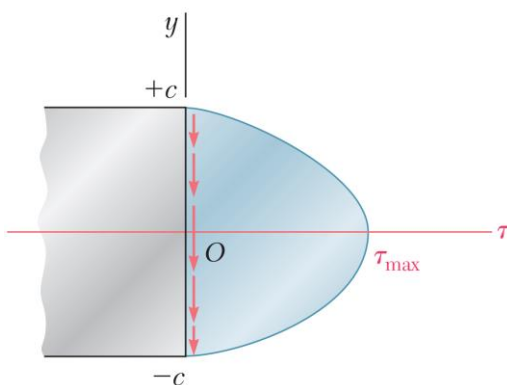
۴-۴- توزیع تنش برشی در سطح مقطع قائم تیر مستطیلی



$$\bar{y} = \frac{y+c}{2} \quad Q_{y_1} = A\bar{y} = b(c-y)\bar{y} \quad \tau_{y_1} = \frac{VQ_{y_1}}{It_{y_1}}$$

$$Q_{y_1} = b(c-y) \frac{(c+y)}{2} = \frac{b}{2}(c^2 - y^2) = \frac{bc^2}{2} \left(1 - \left(\frac{y}{c}\right)^2\right)$$

$$\tau = \frac{V \frac{bc^2}{2} \left(1 - \left(\frac{y}{c}\right)^2\right)}{\frac{1}{12} b (2c)^3 \times b} \Rightarrow \tau = \frac{3V}{4bc} \left(1 - \left(\frac{y}{c}\right)^2\right)$$



$$\tau_{xy} = \frac{3V}{2A} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)$$

$$\tau_{\max} = \frac{3V}{2A}$$

$$y = c \rightarrow Q = 0 \rightarrow \tau = 0$$

$$y = 0 \rightarrow Q = Q_{\max} \rightarrow \tau = \frac{3}{2} \frac{V}{A}$$

$$y = -c \rightarrow Q = 0 \rightarrow \tau = 0$$

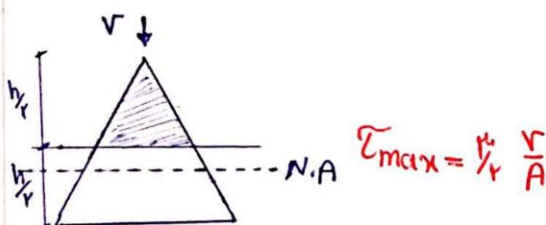
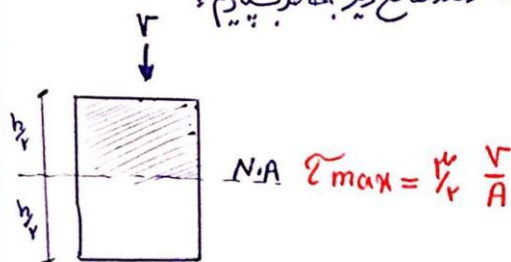


۴-۵- تنش برشی حداکثر در مقاطع مختلف

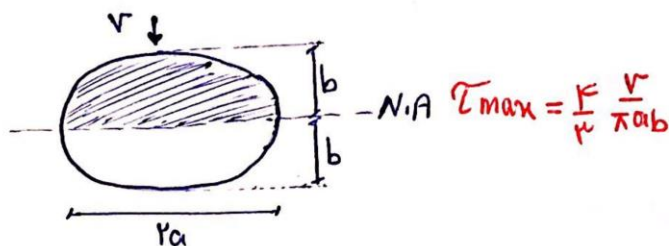
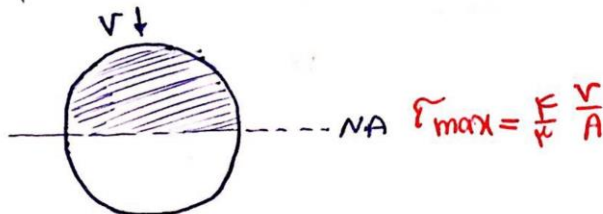
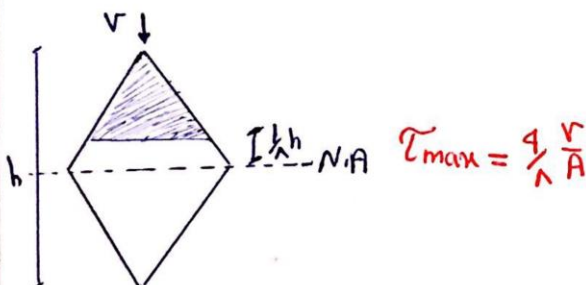
نکته: تنش برشی در مقطع عرضی هنگامی ماکزیم می شود که نسبت $\frac{Q}{t}$ در مقطع ماکزیم شود.

$$\tau = \frac{VQ}{It} \rightarrow \tau_{max} = \frac{V}{I} \left(\frac{Q}{t} \right)_{max}$$

نکته: توضیح می شود که مقدار تنش برشی حداکثر در مقاطع زیر به خاطر پیوستگی است.

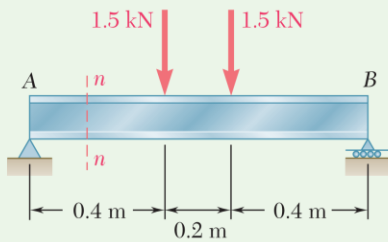


* دقت شود که برای مثلث، حداکثر تنش برشی در محل محدبشی رخ می دهد.





مثال : محاسبه تنش برشی در مقطع I شکل



Sample Problem 6.1

Beam AB is made of three plates glued together and is subjected, in its plane of symmetry, to the loading shown. Knowing that the width of each glued joint is 20 mm , determine the average shearing stress in each joint at section $n-n$ of the beam. The location of the centroid of the section is given in Fig. 1 and the centroidal moment of inertia is known to be $I = 8.63 \times 10^{-6}\text{ m}^4$.

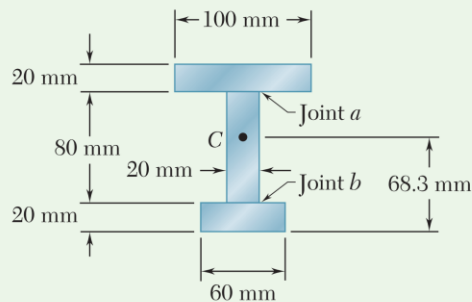


Fig. 1 Cross section dimensions with location of centroid.

MODELING:

Vertical Shear at Section $n-n$. As shown in the free-body diagram in Fig. 2, the beam and loading are both symmetric with respect to the center of the beam. Thus, we have $A = B = 1.5\text{ kN} \uparrow$.

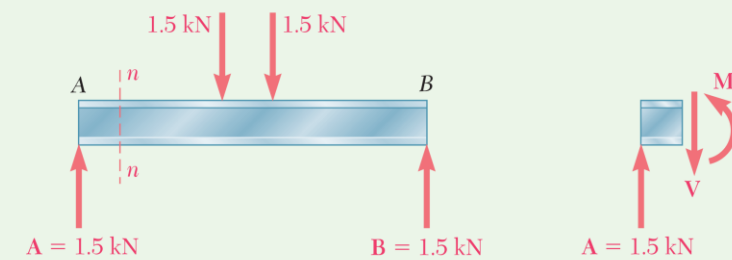


Fig. 2 Free-body diagram of beam and segment of beam to left of section $n-n$.

Drawing the free-body diagram of the portion of the beam to the left of section $n-n$ (Fig. 2), we write

$$+\uparrow \sum F_y = 0: \quad 1.5\text{ kN} - V = 0 \quad V = 1.5\text{ kN}$$

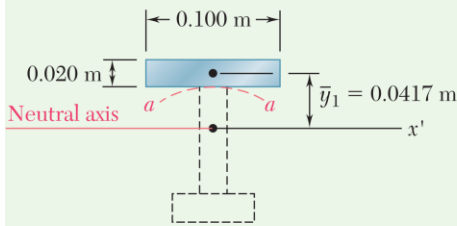


Fig. 3 Using area above section $a-a$ to find Q .

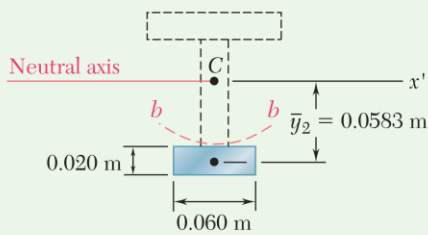


Fig. 4 Using area below section $b-b$ to find Q .

ANALYSIS:

Shearing Stress in Joint a . Using Fig. 3, pass the section $a-a$ through the glued joint and separate the cross-sectional area into two parts. We choose to determine Q by computing the first moment with respect to the neutral axis of the area above section $a-a$.

$$Q = A\bar{y}_1 = [(0.100 \text{ m})(0.020 \text{ m})](0.0417 \text{ m}) = 83.4 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

Recalling that the width of the glued joint is $t = 0.020 \text{ m}$, we use Eq. (6.7) to determine the average shearing stress in the joint.

$$\tau_{\text{ave}} = \frac{VQ}{It} = \frac{(1500 \text{ N})(83.4 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(8.63 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0.020 \text{ m})} \quad \tau_{\text{ave}} = 725 \text{ kPa} \quad \blacktriangleleft$$

Shearing Stress in Joint b . Using Fig. 4, now pass section $b-b$ and compute Q by using the area below the section.

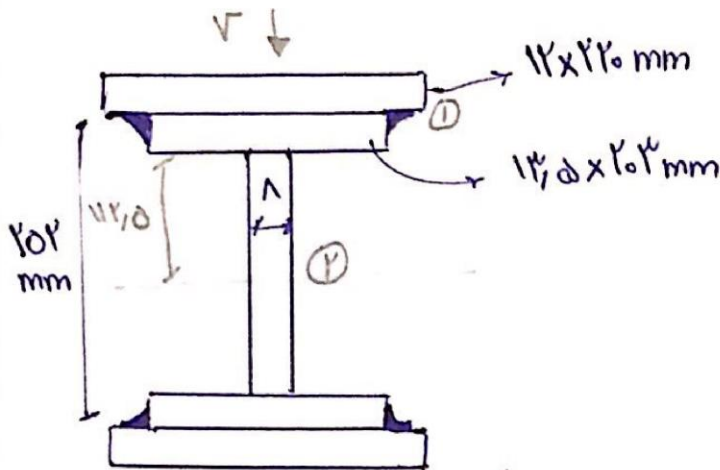
$$Q = A\bar{y}_2 = [(0.060 \text{ m})(0.020 \text{ m})](0.0583 \text{ m}) = 70.0 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau_{\text{ave}} = \frac{VQ}{It} = \frac{(1500 \text{ N})(70.0 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(8.63 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0.020 \text{ m})} \quad \tau_{\text{ave}} = 608 \text{ kPa} \quad \blacktriangleleft$$



مثال: محاسبه تنش برشی در مقطع I شکل تقویت شده با ورق

مثال: مقطع روپرو را در نظر بگیرید، حداکثر نیروی برشی مجاز که تیر با مقطع فوق می‌تواند تحمل کند، چقدر است؟ ($a = 9 \text{ mm}$ ، $\sigma_{all} = 200 \text{ MPa}$ ، $\tau_{all} = 90 \text{ MPa}$)



$$I = \frac{1}{12} \times 12 \times 220^3 + \left(\frac{1}{12} \times 203 \times 12.5^3 + 12.5 \times 203 \times 112.5^2 \right) + \left(\frac{1}{12} \times 12 \times 142^3 + 12 \times 142 \times 142^2 \right)$$

$$\rightarrow I = 178 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

حال مقطع برای در نظر می‌گیریم، که با آن قسمتی که اجزاء بهم چسبیده‌اند، می‌شود به علاوه ی برشی تاریخی که بیشترین مقدار $\left(\frac{Q}{t}\right)$ را داریم:

$$\tau_1 = \frac{V_1 Q_1}{I t_1} \rightarrow \tau_{..} = \frac{V_1 \times (12 \times 220 \times 142)}{178 \times 10^6 \times 12} \rightarrow V_1 = 1125 \text{ MN}$$

$$\tau_2 = \frac{V_2 Q_2}{I t_2} \rightarrow 90 = \frac{V_2 \times 674 \times 10^3}{178 \times 10^6 \times 8} \rightarrow V_2 = 1189 \text{ MN}$$

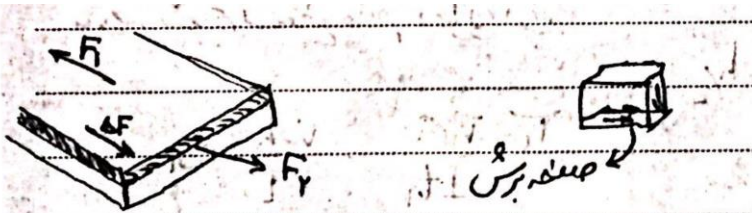
$$Q_2 = 12 \times 220 \times 142 + 12.5 \times 203 \times 112.5 + 8 \times 112.5 \times 8 = 674 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

حال ما باید بین آن‌ها را انتخاب کنیم:

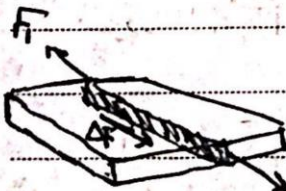
$$V = \min\{V_1, V_2\} = 1189 \text{ MN}$$



۴-۶- برش در مقاطع دارای اجزای نازک



صفحه برش

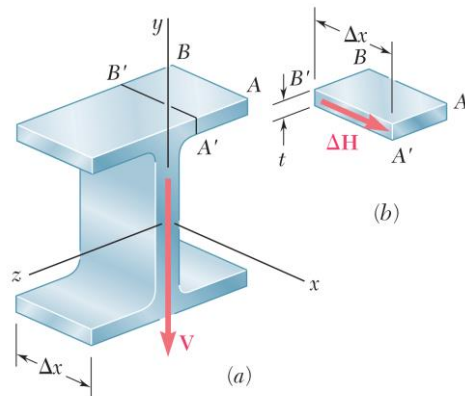
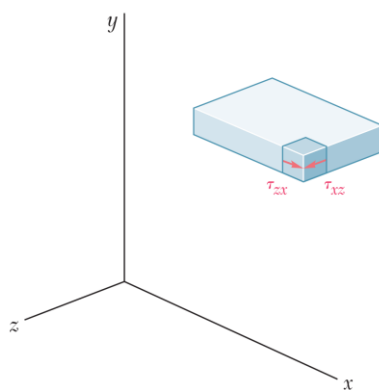


صفحه برش

اگر مقطع برش افقانی در پهنای یال باشد (صفحه برش افقی است)

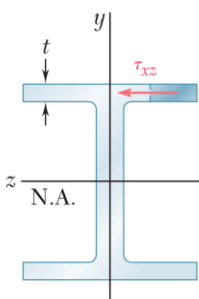
اگر مقطع برش عمودی در ضخامت یال باشد (صفحه برش قائم است)

در اجزای نازک تنش برشی ایجاد شده در جهت طول جزیره بزرگتر از تنش ایجاد شده در ضخامت آن است.

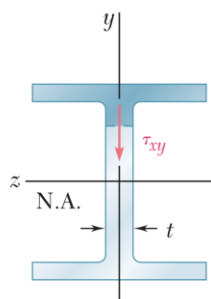


(b)

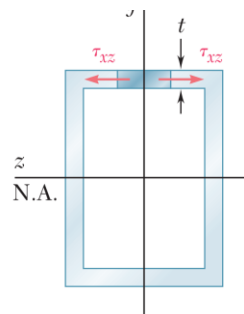
(a)



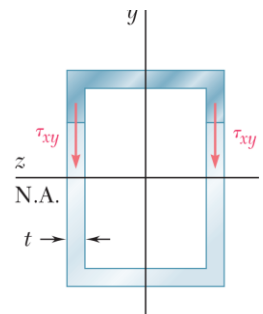
(a)



(b)



(a)



(b)

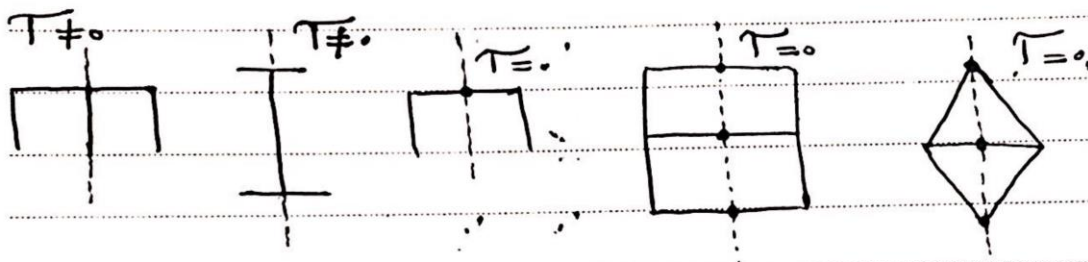


۴-۷- جریان برش در مقاطع دارای اجزای نازک

نقاط دارای تنش برشی صفر

- ۱- اگر یک مقطع جدار نازک باشد
 ۱- دارای محور تقارن در راستای قائم «راستای اعمال برش» باشد
 ۲- بر روی محور تقارن قائم، عضو قائم وجود نداشته باشد

تنش برشی روی هر نقطه که بر روی محور تقارن قائم باشد صفر خواهد بود.

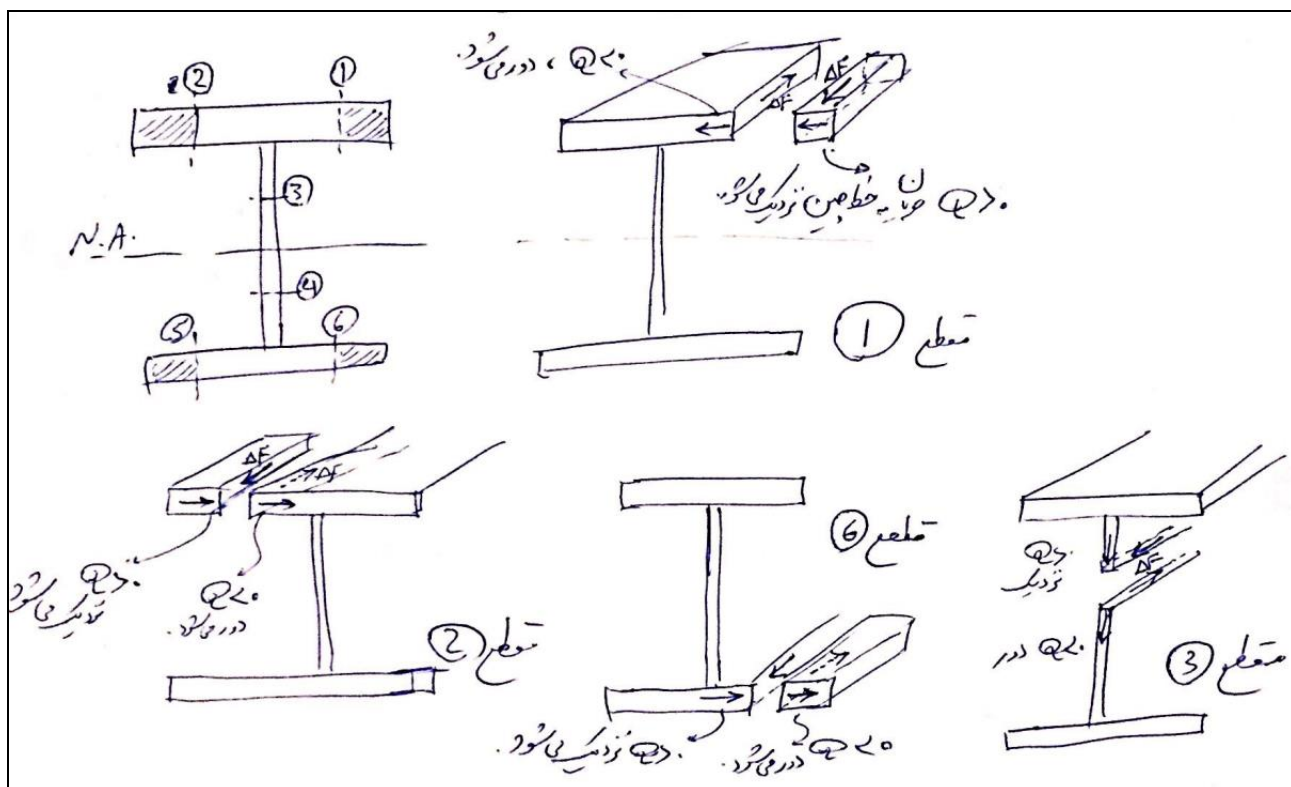


- ۲- نقطه‌ای که در نوک آزاد مقطع قرار دارند تنش برشی صفر است.

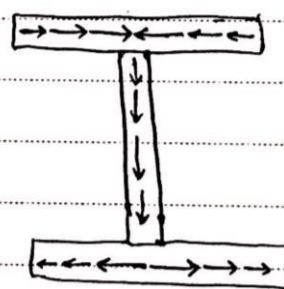
رسم جریان برش

- ۱- ابتدا نقاطی که تنش برشی در آن‌ها صفر است، به عنوان نقطه شروع انتساب می‌کنیم.
 ۲- برای تعیین جهت برش در هر نقطه ابتدا مقطع را در آن نقطه با خطچین به دو قسمت تقسیم می‌کنیم و آن قسمتی که راحت‌تر است را انتساب می‌کنیم.
 ۳- اگر Q سطح انتساب شده مثبت باشد (یعنی مرکز سطح آن بالای محور خنثی باشد) جریان برش به خطچین نزدیک می‌شود. اگر Q منفی باشد جریان برش از خطچین دور می‌شود.

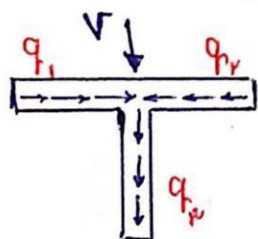
دور می‌شود



مُساهده می شود که یازم به مطلع زدن در تمام
اجزا و نسبت معمولاً وقتی جهت جریان در
یک یا دو جزء مشخص شد از قاعده جریان
در اصل تقارن جهت جریان در سایر
اجزا را می توان بدست آورد.

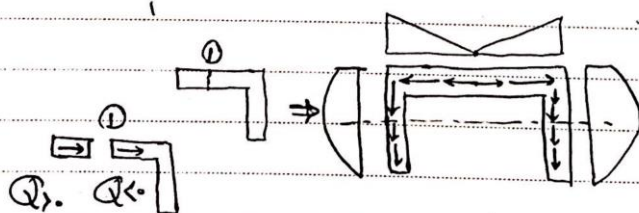


نکته: مطابق اصل پیرستلی جریا برش، در هر گره از یک مقطع جمع جریان های برش ورودی و خروجی باید یکدیگر برابر (ست)



$$q_l + q_r = q_v \Rightarrow \tau_l t_l + \tau_r t_r = \tau_v t_v$$

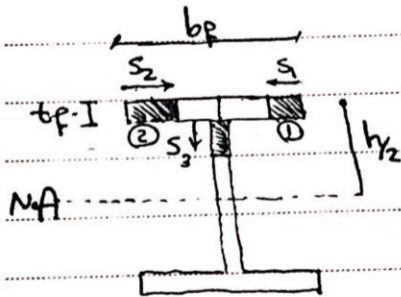
مثال ۴: رسم جریان برشی در مقطع فولادی با ۱ سطح





۴-۹- توزیع تنش برشی در اجزای نازک مقطع (دیاگرام تنش برشی در مقطع)

توزیع تنش برشی در مقطع I شکل



مثال ۱: توزیع تنش برشی بر روی پروفیل I شکل

قبل از برش، مقطع را افقی می‌گیریم ولی در قسمت قبل

متوجه شدیم که مقطع قائم بحرانی تر است.

$$s_1 \leq \frac{b_f}{2} \rightarrow Q_1 = t_f \cdot s_1 \cdot \frac{h}{2}$$

$$\tau_1 = \frac{VQ}{It_f} = \frac{V \cdot h}{2I} s_1$$

$$s_1 = 0 \rightarrow \tau_1 = 0$$

پس در بال، τ با s_1 رابطه خطی دارد.

$$s_1 = \frac{b_f}{2} \rightarrow \tau = \frac{V h b_f}{2I}$$

$$Q_{\text{بال}} = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$Q_{\text{بال}} = (b_f \cdot t_f \cdot \frac{h}{2}) + (h/2 - y) t_w (\frac{h/2 + y}{2})$$

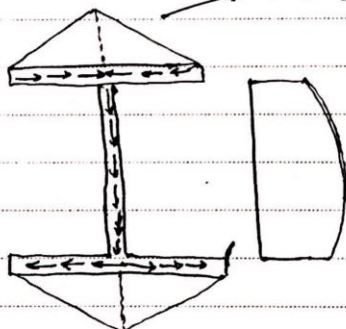
$$Q_{\text{بال}} = b_f \cdot t_f \cdot \frac{h}{2} + \frac{t_w}{2} (\frac{h^2}{4} - y^2)$$

$$\tau = \frac{V}{2I} \left(\frac{b_f t_f h}{t_w} + \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$y = h/2 \rightarrow \tau = \frac{V h b_f t_f}{2I t_w} = \frac{V (Q_1 + Q_2)}{I t_w}$$

$$y = 0 \rightarrow \tau_{\text{max}} = \frac{V h}{2I} \left(\frac{b_f t_f}{t_w} + \frac{h}{4} \right)$$

توزیع تنش برشی در مقطع I شکل

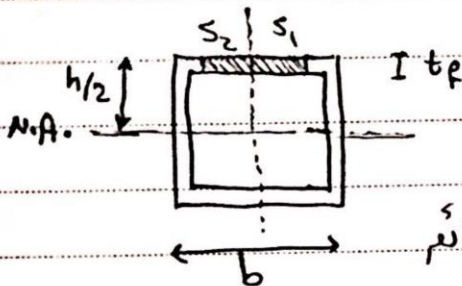


تنش افقی در بال



توزیع تنش برشی در مقطع قوطی

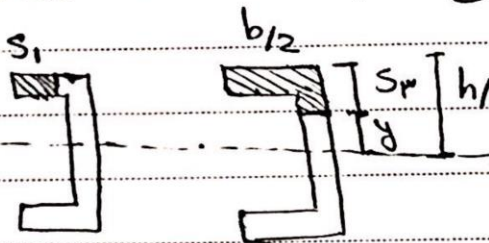
سؤال: توزیع تنش برشی در مقطع جعبه ای شکل را قوطی //



با توجه به اصل تقارن تنش برشی در دور محور تقارن قائم

صفر است. از اینجا به بعد شکل را از محور تقارن قائم

دفع کرده و آن را به عنوان لبه آزاد، نقطه شروع محاسبه Q و T در تقاطع داریم.



توزیع تنش در لبه: $Q_1 = t_f \cdot s_1 \cdot h/2$

$$T_1 = \frac{\nabla Q_1}{I t_f}$$

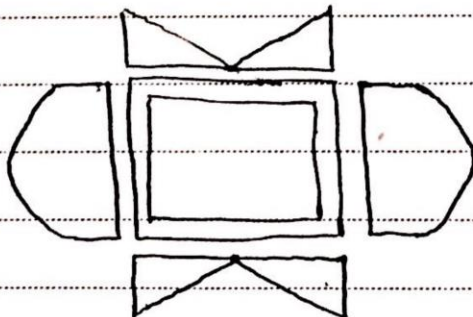
توزیع تنش در جان $Q = Q_1 + Q_3$

$$= (t_f \times b/2) \times h/2 + t_w (h/2 - y)(h/2 + y)/2.$$

$$T_3 = \frac{\nabla Q}{I t_w}$$

رابطه با y درجه 2 است.

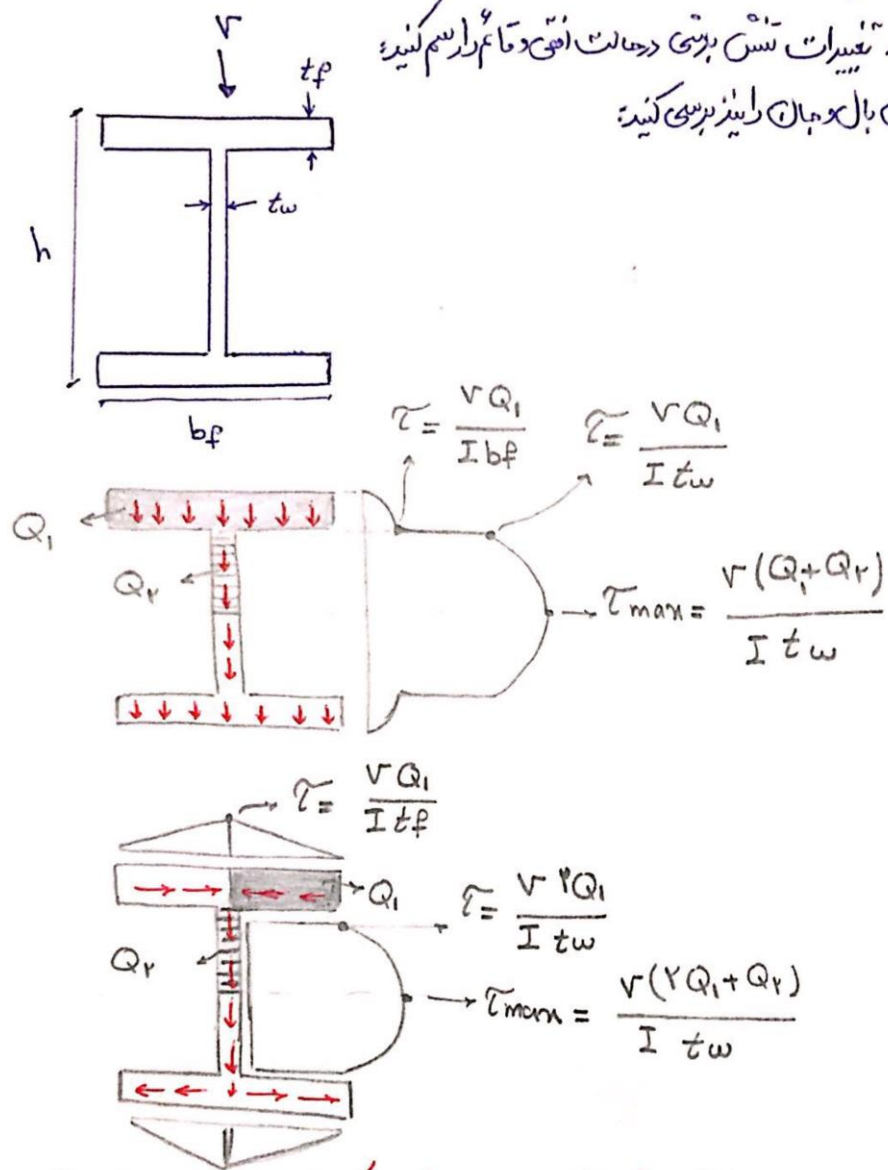
دیاگرام تنش برشی





مقایسه تنش برشی در راستای طول و ضخامت جزء نازک

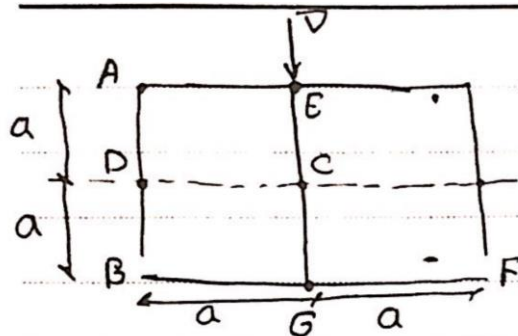
مسئله: یک تیر I شکل تحت اثر برش V در راستای قائم قرار گرفته است.
الف) نمودار تغییرات تنش برشی در حالت افقی و قائم را رسم کنید.
ب) تنش بال و میان را نیز بررسی کنید.



همانگونه که مشاهده می شود، تنش برشی قائم در بال های مقطع مقدار کم داشته و بال های مقطع برش کمی تحمل می کنند، از طرفی وجود بال ها باعث یکپارختی تر شدن تنش برشی بدینوسیله جان مقطع می شود. تنش اصلی بال ها، تحمل کننده عموماً وارد بر مقطع می باشد، و این اصلی جان مقطع، یکپارچه کردن مقطع و اتصال بال به یکدیگر برای تحمل کننده عموماً می باشد و این از آن جان مقطع با توجه به هندسه اش، تنش اصلی در محل پیروی برشی وارد بر مقطع را دارد.

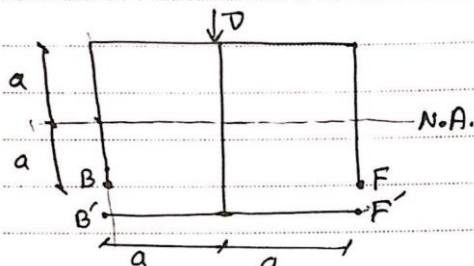


مثال - محاسبه تنش برشی، جریان برش و دیاگرام تنش برشی

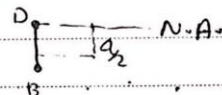


مثال: تنش برشی در نقاط مشخص شده را محاسبه کنید

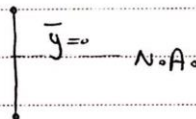
دیاگرام تنش برشی و جریان برش

نقاط تنش برش: B و B' و F و F'

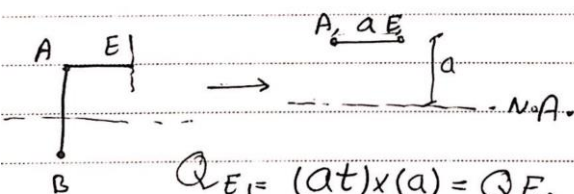
$$Q_B = Q_{D_1} = -(at) \times (a/2) =$$



$$Q_A = (2at) \times (a) = 0$$



مثال: این جی مانند نقطه A لبه آزاد است پس برای ادامه محاسبات می توان مقطع AB را کنار گذاشت.



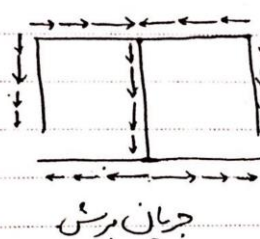
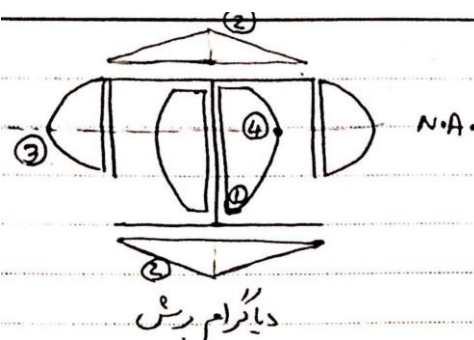
$$Q_{E_1} = (at) \times (a) = Q_{E_2}$$

$$Q_{E_3} = Q_{E_1} + Q_{E_2} = 2at$$

$$Q_C = (2at)(-a) + (at)(-a/2)$$

$$Q_{G_1} = Q_{G_2} = (at)(-a) \quad Q_{G_3} = (2at)(-a)$$

PAPCO



جریان برش

$$① \frac{V 2a^2}{It}$$

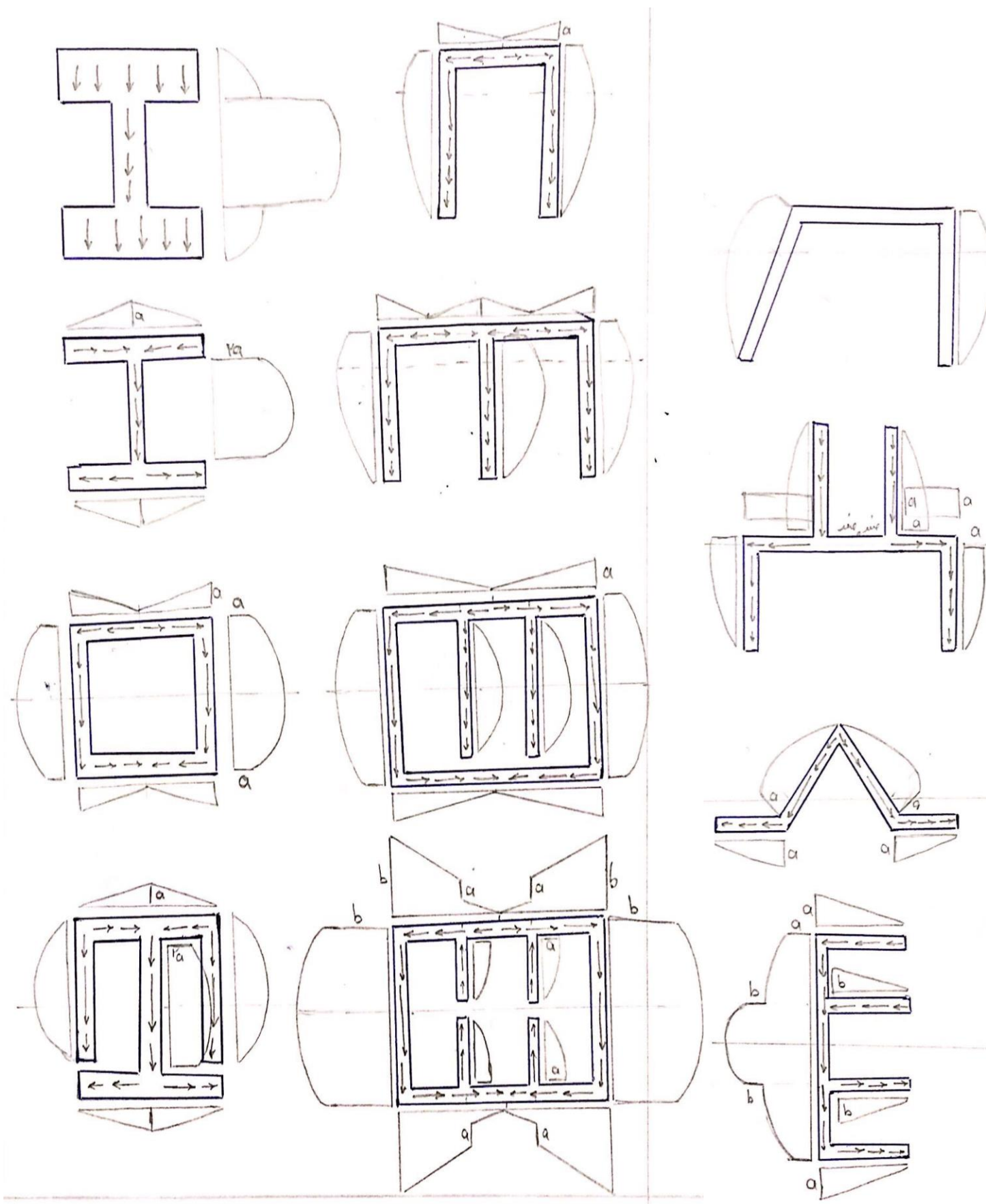
$$② \frac{V a^2 t}{It}$$

$$③ \frac{V a^2 t}{2It}$$

$$④ \frac{V \times 25 a^2 t}{It}$$

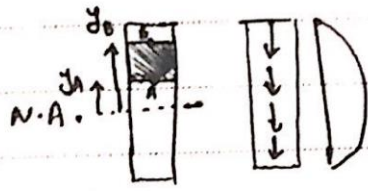


مثال - جریان برش و دیاگرام تنش برشی در مقاطع مختلف

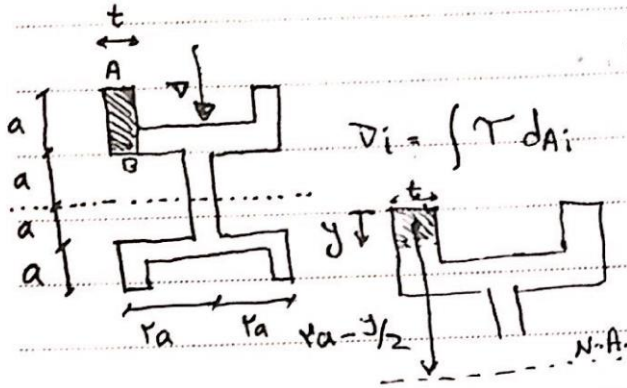




۴-۱۱- نیروی برشی وارد بر قسمتی از مقطع



$$F = \int_{y_A}^{y_B} \tau dA = \int_{y_A}^{y_B} \tau \cdot t \cdot dy$$



مثال: نیروی برش ایجاد شده در قطعه AB چندراست؟

$$V_i = \int \tau dA_i$$

$$Q_y = t y \times (2a - y/2)$$

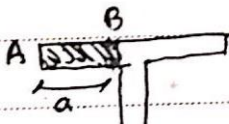
$$V_i = \int_0^a \frac{V Q(y)}{I t} \cdot t \cdot dy$$

$$\Rightarrow V_i = \frac{V}{I} \int_0^a (t x y) (2a - y/2) dy$$

$$= \frac{V}{I} \left[\frac{5}{4} a^3 t \right]$$

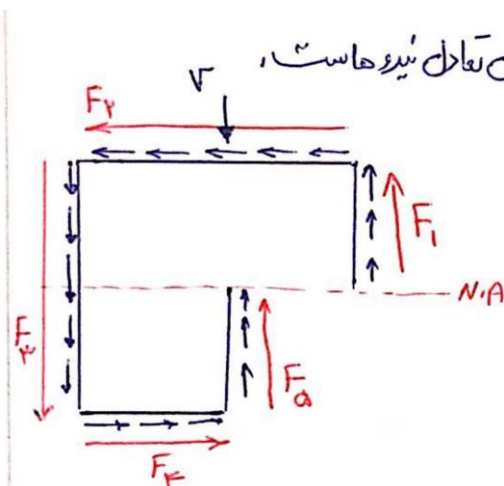
(نیروی ایجاد شده در اعضای افقی) در این حالت چون توزیع تنش به صورت خطی است نیازی

به انتقال نیرو نیست و می توان تنش متوسط را به دست آورد و در مساحت قطعه ضرب کرد.



$$F_{AB} = \left(\frac{\tau_A + \tau_B}{2} \right) \times a \times t$$

نیروی برش ایجاد شده در قطعه AB



نکته: مجموع نیروی برشی ایجاد شده در اجزاء افقی و عمودی تابع اصل تعادل نیروهاست.

$$\sum F_{x \text{ داخلی}} = \sum F_{x \text{ خارجی}}$$

$$0 = -F_v + F_s$$

$$\sum F_{y \text{ داخلی}} = \sum F_{y \text{ خارجی}}$$

$$-V = F_1 + F_2 - F_v$$



مثال - محاسبه نیروی برشی در اجزای مقطع

نیروی برشی ایجاد شده در اجزای AB و BC را بیابید.

$t = 0.25$

$$F_{AB} = \int_A^B \tau dA = \int_{y_A=0}^{y_B=2} \frac{V Q(y)}{I t} t dy \quad (1)$$

$$F_{BC} = \int_B^C \tau dA = \int_{s_B=0}^{s_C=5} \frac{V Q(s)}{I t} t ds \quad (2)$$

مقادیر $Q(y)$ ، $Q(s)$ ، I از رابطه زیر به دست می آید.

$$(AB \text{ در } y) Q(y) = A(y) \times \bar{y} = (y \cdot t) \left(5 - \frac{y}{2} \right) \quad (3)$$

$$(BC \text{ در } s) Q(s) = A(s) \times \bar{y} = (s \cdot t) \left(3 - \frac{s}{2} \sin \theta \right) \quad (4)$$

$$I = 2 I_{AB} + 2 I_{BC} \quad (5)$$

$$I_{AB} = \frac{1}{12} \times 0.25 \times 2^3 + (0.25 \times 2) \times 4^2$$

$$(C \text{ در } s) I_{BC} = \frac{1}{3} \times a h^3 = \frac{1}{3} (a h) h^2 = \frac{1}{3} (l t) h^2$$

$$I_{BC} = \frac{1}{3} A h^2 = \frac{1}{3} \times 5 \times 0.25 \times 3^2$$

$$I = \frac{1}{12} A h^2$$

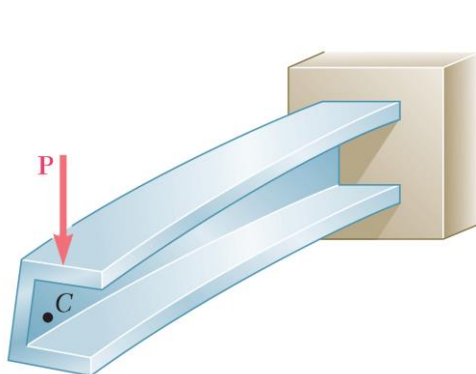
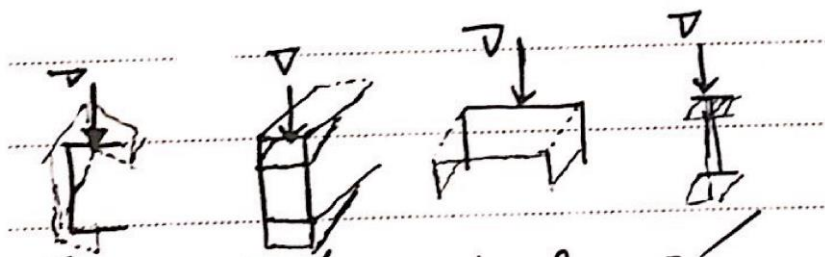
$(l t = a h)$



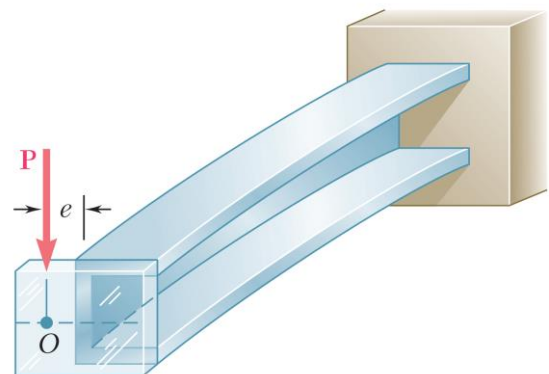
برای هر مقطع، نقطه‌ای وجود دارد که با اعمال بارگذاری در آن نقطه، در مقطع تنش‌های یکسان ایجاد می‌شود که این نقطه مرکز برش نام دارد.

مقاطع که تقارن عمودی ندارند، علاوه بر حرکت عمودی، حرکت پیچشی رخ می‌دهد و یک نقطه خارج از آن

وجود دارد که زمانی که نیرو را اعمال کنیم فقط حرکت در راستای قائم دارد.



نیروی برشی در مرکز برش اعمال نشده است

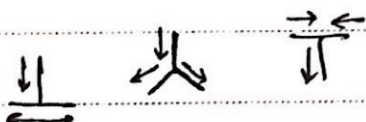


نیروی برشی در مرکز برش اعمال شده است

مرکز برش بستگی به مقدار نیروی برشی ندارد و یک مکان هندسی است.

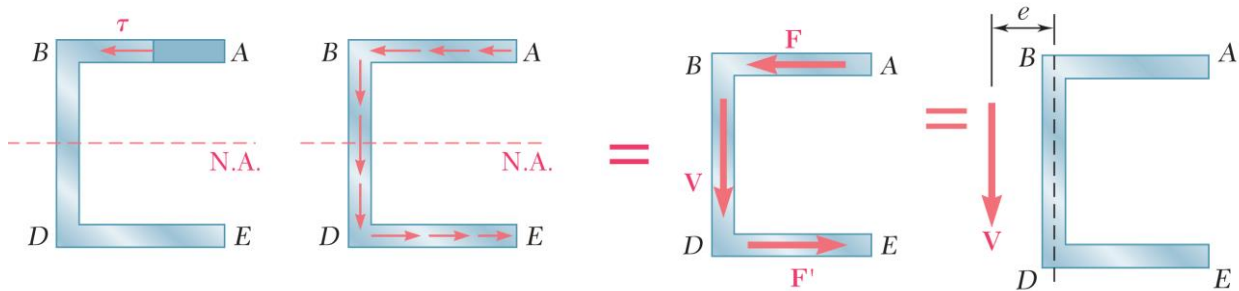
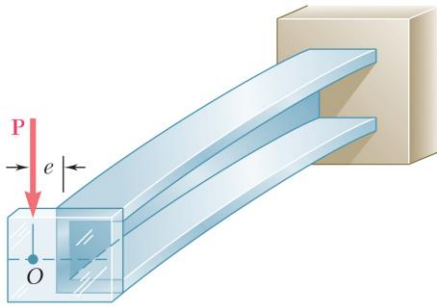
در صورتی که یک مقطع دو محور تقارن داشته باشد مرکز برش وسط محورهای تقارن است.

اگر یک مقطع از چند جزء هم‌رأس تشکیل شده باشد مرکز برش همان مرکز تقاطع اجزاء است.





محاسبه مرکز برش برای یک مقطع ناودانی



مختارگیری حول D:

$$\sum M_D = \sum M_p$$

قاعده داخلی

$$V \cdot e = F_1 x_0 + F_1 x h + F_1 x h \rightarrow e = \frac{2 F_1 h}{V}$$

مختارگیری حول O:

$$\sum M_O = \sum M_O$$

قاعده داخلی

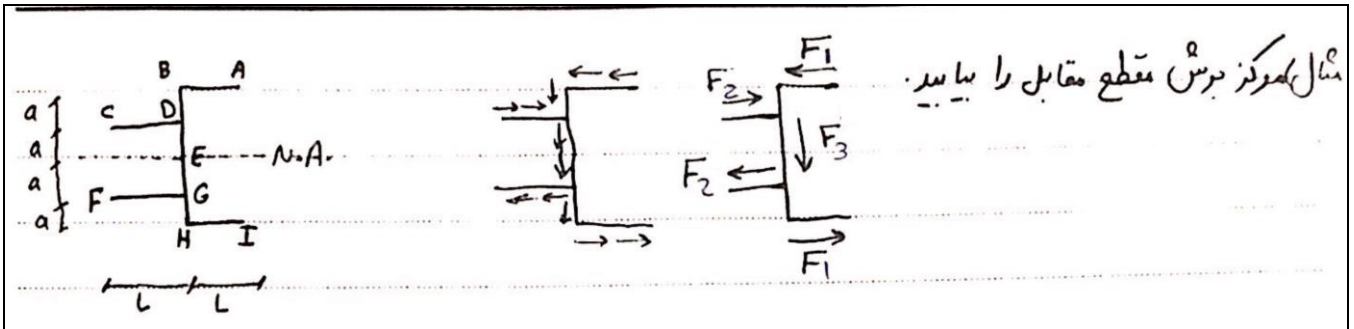
$$V x_0 = -F_1 x e + 2 F_1 h \rightarrow e = \frac{2 F_1 h}{V}$$

$$F_1 = \left(\frac{\tau_A + \tau_B}{r} \right) \times a t \quad \tau_A = 0 \quad \tau_B = \frac{V Q_B}{I t} = \frac{V a t h}{I t} = \frac{V a h}{I}$$

$$F_1 = \frac{V a^2 h t}{r I} \quad e = \frac{2 F_1 h}{V} = \frac{a^2 h t}{I}$$



مثال - محاسبه مرکز برش



$$+\downarrow \sum M_B = \sum M_B \text{ داخلی}$$

$$V \times e = (F_1 \times a) \times 2 - (F_2 \times a) \times 2$$

$$F_1 = \left(\frac{T_A + T_B}{2} \right) L t \quad F_2 = \left(\frac{T_C + T_D}{2} \right) L t$$

$$T_A = 0 \quad T_B = \frac{V(Lt)(2a)}{I t} \quad T_C = 0 \quad T_D = \frac{V \times (Lt)(a)}{I t}$$

$$F_1 = \frac{1}{2} \frac{V}{I t} (L t)^2 (2a) \quad F_2 = \frac{1}{2} \frac{V}{I t} (L t)^2 (a)$$

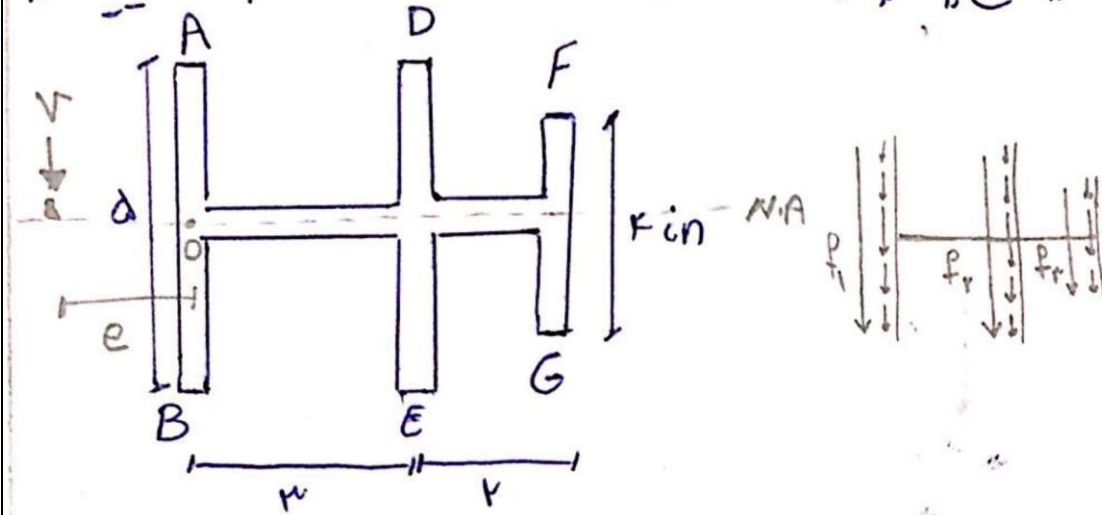
$$e = \frac{(L t)^2 (2a)^2}{I t} - \frac{(L t)^2 a^2}{I t}$$

$$e = \frac{3L^2 t a^2}{I}$$



مثال - محاسبه مرکز برش

مثال در شکل زیر مقطع یک تیر جدار نازک نشان داده شده است. محل مرکز برش را تعیین کنید.



$$\sum M_{\text{outer}} = \sum M_{\text{inner}} \rightarrow ve = -tP_r - aP_w \rightarrow e = \frac{-tP_r - aP_w}{v}$$

$$P_r = \int_0^a \frac{vQ}{It} t dy = \frac{v}{I} \int_0^a (ty)(t(a - \frac{y}{t})) dy = 10/42 \frac{vt}{I}$$

$$P_w = \int_0^{2t} \frac{vQ}{It} t dy = \frac{v}{I} \int_0^{2t} (ty)(t - \frac{y}{t}) dy = 5/12 \frac{vt}{I}$$

$$I = 2(\frac{1}{12} \times t \times a^3) + \frac{1}{12} \times t \times (2t)^3 + \frac{1}{12} \times a \times t^3 = 26/12 t$$

$$\rightarrow e = \frac{-t \times P_r - aP_w}{v} = \frac{-t \times 10/42 \frac{vt}{I} - a \times 5/12 \frac{vt}{I}}{26/12 t}$$

چون مثبتی شده، بنابراین مرکز برش در آن طرف AB قرار میگیرد

$$\rightarrow e = -2,21 \text{ in}$$



مثال - محاسبه مرکز برش

مثال: مرکز برش مقطع متقابل را بیابید.

$$+ \sum M_D = + \sum M_D$$

$$-Ve = (F_1 \times \frac{a}{2}) \times 2 + (F_2 \times a) \times 2 \quad F_1 = ? \quad F_2 = ?$$

$$F_1 = \int \tau_{xy} dA = \int_0^{a/2} \tau_{xy} \cdot t \cdot dy \quad Q_{xy} = (y \times t) \times \frac{y}{2} = \frac{t y^2}{2} \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

$$F_1 = \int_0^{a/2} \frac{\partial x t x y^2}{2 I t} x t dy \quad F_1 = \frac{\partial t}{2 I} \int_0^{a/2} y^2 dy$$

PAPCO

$$= \frac{\partial t}{2 I} y^3 \Big|_0^{a/2} \rightarrow F_1 = \frac{\partial t}{4 I} a^3 = \frac{1}{4} \partial \quad \frac{\partial}{\lambda} a$$

$$F_2 = \left(\frac{\tau_A + \tau_B}{2} \right) \times a t \rightarrow \tau_A = \frac{\partial}{I t} \left(\frac{a}{2} x t \times \frac{a}{2} \right) = \frac{\partial}{4 I} - a^2$$

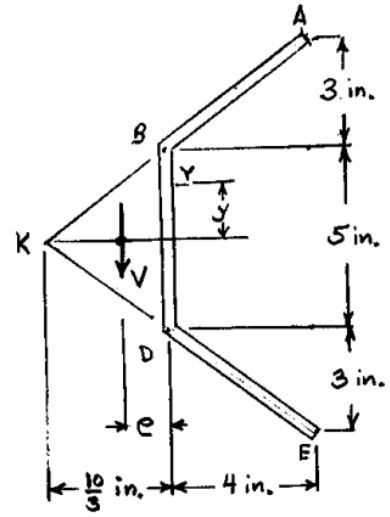
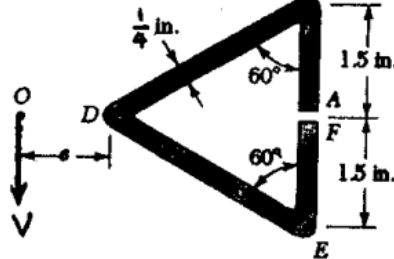
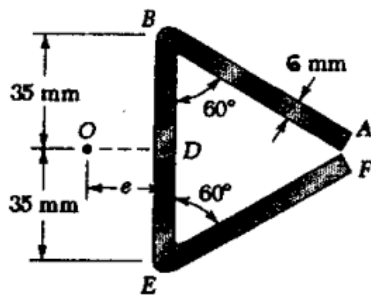
$$F_2 = \frac{9}{14} \partial \quad \tau_B = \frac{\partial}{I t} (Q_A + a t \times \frac{a}{2})$$

$$e = - \frac{\left(\frac{9}{14} \partial a + \frac{1}{4} \partial a \right)}{\partial} \rightarrow e = - \left(\frac{1}{14} \partial a \right) \rightarrow e = - \frac{1}{14} a = - \frac{\partial}{\lambda} a$$

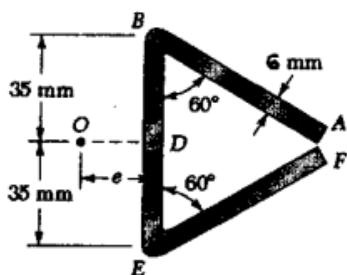


مثال - محاسبه مرکز برش

مرکز برش مقاطع زیر را به دست آورید.



یادآوری: جهت محاسبه نیروی برشی ایجاد شده در اجزای مورب نازک به مثال مربوطه مراجع کنید.



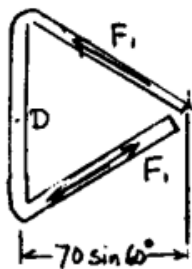
SOLUTION

$$I_{DB} = \frac{1}{3}(6)(35)^3 = 85.75 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$L_{AB} = 70 \text{ mm} \quad A_{AB} = (70)(6) = 420 \text{ mm}^2$$

$$I_{AB} = \frac{1}{3} A_{AB} h^2 = \left(\frac{1}{3}\right)(420)(35)^2 = 171.5 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$I = (2 \times 85.75 \times 10^3) + (2 \times 171.5 \times 10^3) = 514.5 \times 10^3 \text{ mm}^4$$



$$\text{Part AB} \quad A = ts = 6s$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2} s \sin 30^\circ = \frac{1}{4} s$$

$$Q = A\bar{y} = \frac{3}{2} s^2$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{3Vs^2}{It}$$

$$F_1 = \int \tau dA = \int_0^{70} \frac{3Vs^2}{2It} t ds = \frac{3V}{I} \int_0^{70} s^2 ds$$

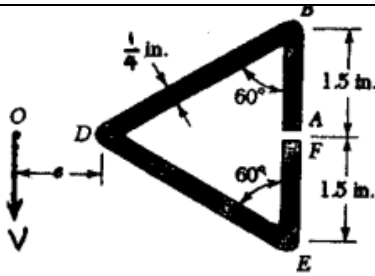
$$= \frac{(3)(70)^3}{(2)(3)I} V = \frac{1}{3} V$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = +\circlearrowleft \Sigma M_D \quad Ve = 2(F_1 \cos 60^\circ)(70 \sin 60^\circ)$$

$$= 20.2 V$$

$$e = 20.2 \text{ mm}$$





$$I_{AB} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right) (1.5)^3 = 0.28125 \text{ in}^4$$

$$L_{BD} = 3 \text{ in} \quad A_{BD} = (3) \left(\frac{1}{4}\right) = 0.75 \text{ in}^2$$

$$I_{BD} = \frac{1}{3} A_{BD} h^2 = \frac{1}{3} (0.75) (1.5)^2 = 0.5625 \text{ in}^4$$

$$I = (2)(0.28125) + (2)(0.5625) = 1.6875 \text{ in}^4$$

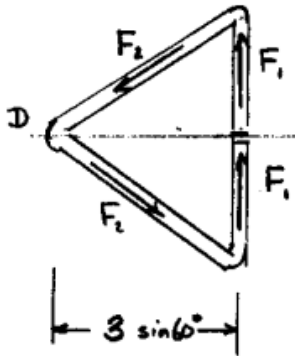
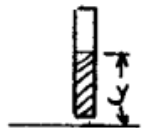
$$\text{Part AB: } A = \frac{1}{2} y \quad \bar{y} = \frac{1}{2} y \quad Q = A\bar{y} = \frac{1}{8} y^2$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V y^2}{(8)(1.6875)(0.25)} = \frac{V y^2}{3.375}$$

$$F_1 = \int \tau dA = \int_0^{1.5} \frac{V y^2}{3.375} \cdot (0.25 dy)$$

$$= \frac{(0.25)V}{3.375} \frac{y^3}{3} \Big|_0^{1.5} = \frac{(0.25)(1.5)^3}{(3.375)(3)}$$

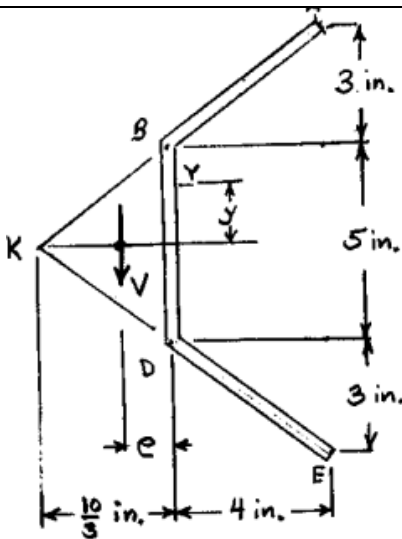
$$= 0.08333 V$$



$$\sum M_D = \sum M_D \quad V e = 2 F_1 (3 \sin 60^\circ)$$

$$V e = (2)(0.08333) V (3 \sin 60^\circ)$$

$$e = (2)(0.08333)(3 \sin 60^\circ) = 0.433 \text{ in.}$$



$$L_{AB} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ in.} \quad A_{AB} = 5t$$

$$I_{AB} = \frac{1}{12} A_{AB} h^2 + A_{AB} d^2 = \frac{1}{12} (5t)(3)^2 + (5t)(4)^2$$

$$= 83.75 t \text{ in}^4$$

$$I_{BD} = \frac{1}{12} (t)(5)^3 = 10.417 t \text{ in}^4$$

$$I = 2 I_{AB} + I_{BD} = 177.917 t \text{ in}^4$$

$$\text{In part BD } Q = Q_{AB} + Q_{BD}$$

$$Q = (5t)(4) + (2.5 - y)t \left(\frac{1}{2}\right)(2.5 + y)$$

$$= 20t + 3.125t - \frac{1}{2} t y^2$$

$$= (23.125 - \frac{1}{2} y^2) t$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} \quad F_{BD} = \int \tau dA = \int_{-2.5}^{2.5} \frac{V (23.125 - \frac{1}{2} y^2) t}{I t} \cdot t dy$$

$$= \frac{V t}{I} \int_{-2.5}^{2.5} (23.125 - \frac{1}{2} y^2) dy = \frac{V t}{I} \left[23.125 y - \frac{1}{6} y^3 \right]_{-2.5}^{2.5}$$

$$= \frac{V t}{I} \cdot 2 \left[(23.125)(2.5) - \frac{(2.5)^3}{6} \right] = \frac{V t (110.417)}{177.917 t}$$

$$= 0.62061 V$$

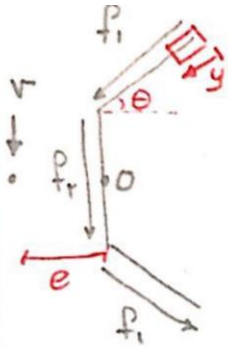


$$\sum M_k = \sum M_k$$

$$-V \left(\frac{10}{3} - e \right) = -\frac{10}{3} (0.62061 V)$$

$$e = \frac{10}{3} [1 - 0.62061] = 1.265 \text{ in.}$$

راه حل دوم:



$$\sum M_{\text{center}} = \sum M_{\text{center}}$$

$$e r = r \times F_1 \cos \theta \times r_0 = r F_1 \times \frac{r_0}{r} = F_1 r_0$$

$$\rightarrow e = \frac{F_1 r_0}{r}$$

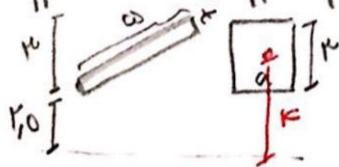
$$F_1 = \int \tau dA = \int_0^a \frac{r Q}{I t} t dy = \frac{r}{I} \int_0^a (t y) (0.10 - \frac{1}{r} y) dy$$

Q_{AB}

$$Q_{AB} = (t y) (0.10 - \frac{y}{r} \sin \theta) = (t y) (0.10 - \frac{y}{r} \times \frac{r_0}{r})$$

$$\rightarrow F_1 = \frac{r t}{I} \int_0^a (0.10 y - \frac{1}{r} y^2) dy = \frac{r t}{I} \left(\frac{0.10}{2} y^2 - \frac{1}{3} \frac{y^3}{r} \right)_0^a = 0.0410 \frac{r t}{I}$$

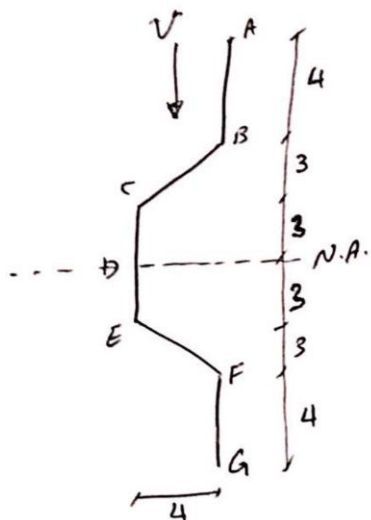
$$I = \frac{1}{12} t a^3 + r \left(\frac{1}{12} \times \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right) (r^3) + \left(\frac{\partial t}{\partial r} \times r^3 \right) \frac{r}{r} \right) = 14.8 t$$



$$e = \frac{F_1 r_0}{r} = \frac{F \times 0.0410 \frac{r t}{I}}{r} = \frac{F \times 0.0410 \frac{r t}{14.8 t}}{r} = 1.14 \text{ in}$$



تمرین - محاسبه مرکز برش



مرکز برش در مقطع ادبرده بیاید.

راهمایی: نیروی AB و BC را به دست آورید و حول D گسترش بگیرید.
 روش دوم: نیروی AB و CE را به دست آورید و حول نقطه تقاطع BC و EF گسترش بگیرید.
 دقت کنید که برای به دست آوردن نیروی خود CE یا BC ، نقطه شروع آنست که نیروی E را بیاید.

سوالات زیر را حل نمایید.

6.3 6.5 6.11 6.28 6.31 6.33 6.36 6.40 6.48 6.49 6.61 6.68 6.70