

دانشگاه سواد

مقاومت مصالح

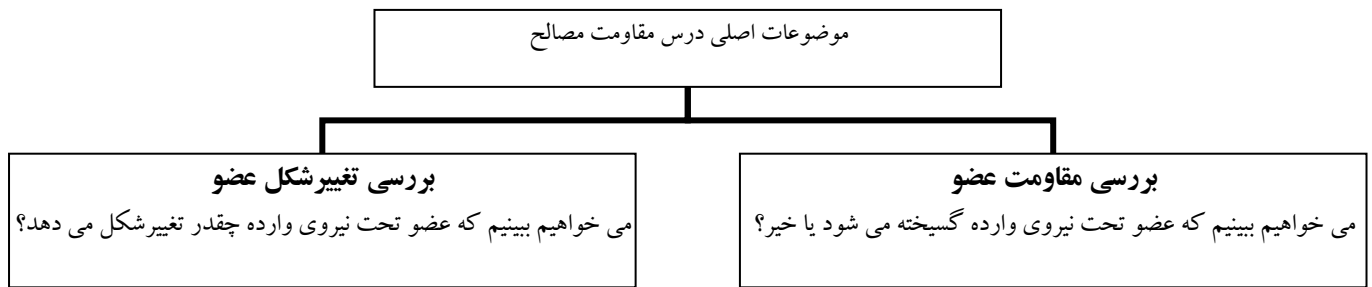
مبحث دوم:

کرنش

مدرس: دکتر محمد رضا میر جلیلی

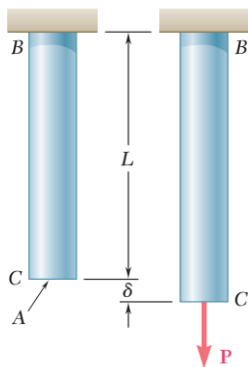


همانطور که در بحث پیشین گفتیم، علم مقاومت مصالح به دو موضوع اصلی می پردازد:



در بحث قبلی، موضوع اول را بررسی کردیم و معیار بررسی مقاومت را با تعریف مفهوم تنش توضیح دادیم. در این فصل، بر روی موضوع دوم وقت می گذاریم. بدین منظور مفهوم کرنش را معرفی می کنیم.

آشنایی با مفهوم کرنش-Strain



کرنش به طور ساده به معنی نسبت تغییر شکل به شکل اولیه است.

مثلا برای یک میله تحت نیروی محوری کششی، کرنش عبارت است از تغییر طول به طول اولیه.

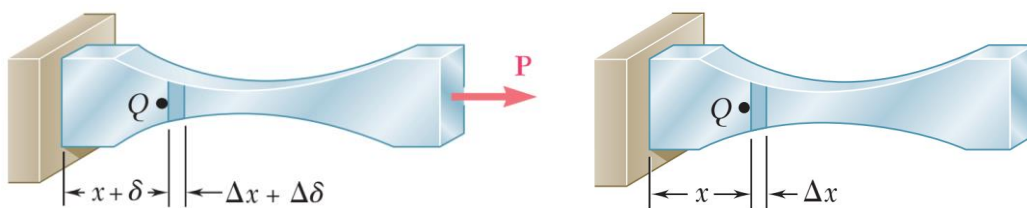
$$\epsilon = \frac{\delta}{L}$$

تعریف فوق یک تعریف ساده شده است. تعریف دقیق و ریاضی کرنش در یک میله، میزان

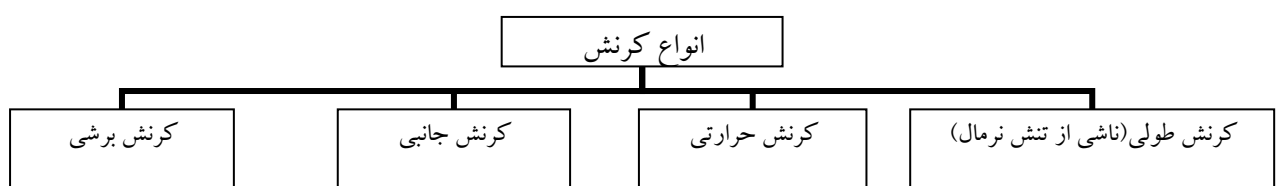
تغییر طول یک المان با طول واحد است.

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx}$$

مثلا برای المان با طول Δx که بسیار کوچک در نظر گرفته شده است، مقدار کرنش برابر است با:



رابطه فوق مربوط به حالتی از بارگذاری است که میله تحت نیروی محوری قرار گرفته باشد (کرنش محوری). به طور کلی انواع کرنش عبارتند از:





کرنش ناشی از تنش نرمال

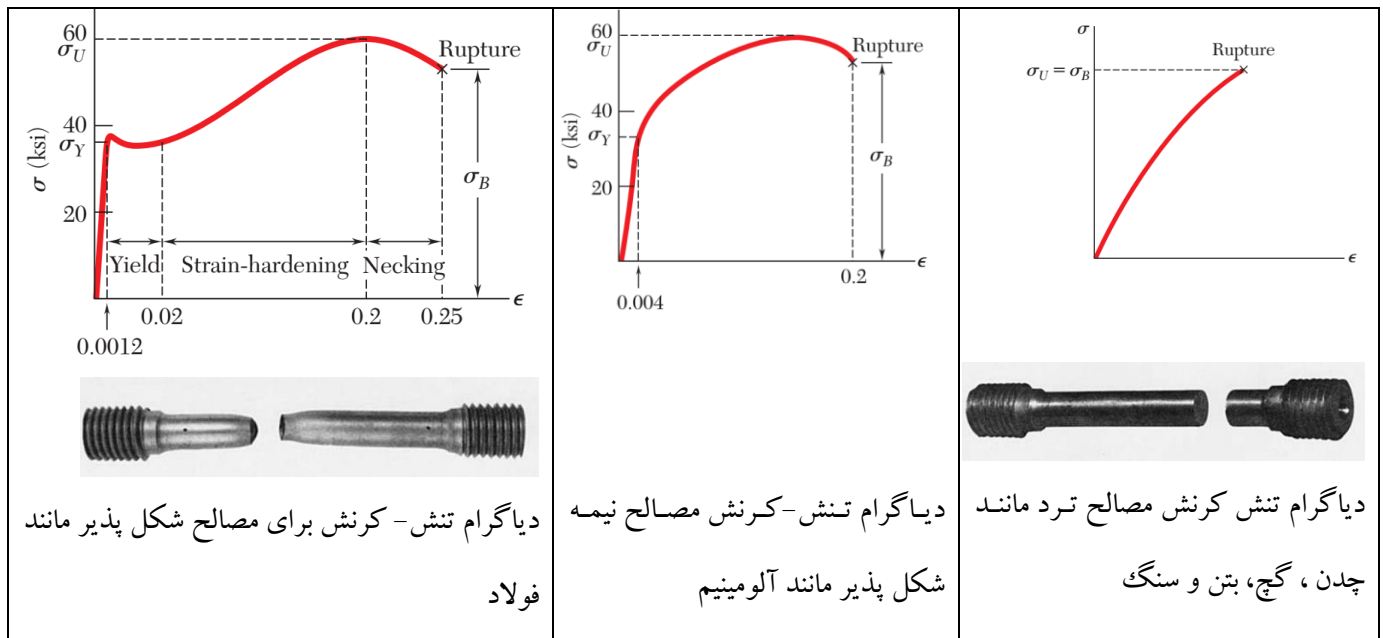
دیاگرام تنش-کرنش

یکی از مهمترین نمودارهای علم مقاومت مصالح، دیاگرام تنش-کرنش است. این دیاگرام معرف رفتار مصالح بوده و پارامترهای مهمی را می توان از آن استخراج نمود. برای به دست آوردن این نمودار، از آزمایشی به نام کشش مستقیم استفاده می شود. بدین ترتیب که یک المان میله ای را در دستگاه تحت کشش با نیروی P قرار می دهند. با افزایش نیروی P ، تنش وارد بر عضو نیز افزایش

$$\sigma = \frac{P}{A}, \quad \epsilon = \frac{\delta}{L}$$

می یابد. از طرفی طول المان و به تناسب آن کرنش هم افزایش می یابد.

حال اگر در گام های مختلف، مقادیر تنش و کرنش را ثبت کرده و در یک نمودار رسم کنیم، نمودار تنش-کرنش به دست می آید. برای مصالح مختلف، سه دسته رفتار و نمودار قابل تصور است:



مصالح ترد، بعد از افزایش تنش، به محض رسیدن به تنش نهایی به طور ناگهانی گسیخته می شوند. در حالی که مصالح شکل پذیر یا نرم، با افزایش تنش ابتدا تسلیم یا جاری شده و سپس بعد از تغییر شکل نسبتاً زیادی نازک شده و گسیخته می شوند. مصالح نیمه شکل پذیر حالتی میانی دارند.

رابطه تنش کرنش در حالت خطی-قانون هوک

در ابتدای بارگذاری و در محدوده ای که نیروی وارد شده به المان در حدی نیست که تغییر شکل های پلاستیک در آن ایجاد کند، اصطلاحاً رفتار عضو الاستیک یا ارتجاعی است. یعنی مانند فنر رفتار می کند و به تناسب نیرویی که به آن وارد می شود، تغییر طول می

$$\sigma = E\epsilon$$

دهند. در این حالت رابطه روبرو بین تنش و کرنش برقرار است:



رابطه مهم فوق به نام قانون هوک Hooke's Law معروف است و می توان گفت مهمترین رابطه مقاومت مصالح است. ضریب E ،

مدول الاستیسیته یا ضریب ارتجاعی یا ضریب فنریت یا ضریب کشسانی یا مدول یانگ نامیده می شود.

ضریب ارتجاعی E ، نشان دهنده سختی مصالح بوده و فقط به جنس مصالح بستگی دارد. دیمانسیون آن مشابه تنش بوده و با توجه به

بزرگی عدد آن نسبت به تنش، به جای MPa از GPa استفاده می شود. برای مثال:

مصالح	فولاد	آلومینیم	آلیاژ برنج	مس	شیشه	الماس	استخوان	چوب
مدول الاستیسیته [GPa]	۲۰۰	۷۰	۱۰۰-۱۲۵	۱۲۰	۵۰-۹۰	۱۱۰۰	۱۴	۱۱

دقت شود که رابطه هوک فقط در محدوده الاستیک یا خطی رفتار عضو اعتبار دارد. همانطور که در ادامه خواهد آمد، از یک نقطه-

ای به بعد دیگر این رابطه برقرار نخواهد بود.

رفتار مصالح شکل پذیر^۱ (Ductile)

۱-۳-۱- بررسی منحنی تنش-کرنش در مصالح داکتیل

با توجه به شیوه انجام آزمایش کشش مستقیم، یک میله فولادی را تحت اثر نیروی کششی P قرار داده و با افزایش نیروی P ، مقادیر تنش و کرنش در میله را به دست می آوریم.

نمودار تنش - کرنشی که می توان با تقریب مناسب برای فولاد ساختمانی

رسم کرد، مطابق شکل مقابل است.

در این نمودار به موارد زیر توجه شود:

۱- هر یک از نقاط A ، B ، C ، D و E نماینده وضعیت مشخصی در

فولاد می باشند که عبارتند از:

نقطه B : حد تسلیم

نقطه A : حد خطی

نقطه D : نقطه تنش ماکزیمم در فولاد

نقطه C : حد سخت شدگی مجدد

نقطه E : حد گسیختگی فولاد

۲- در ناحیه OA ، نمودار تنش - کرنش به صورت خطی تغییر کرده و شیب نمودار در این قسمت مقداری

ثابت است. شیب نمودار در این ناحیه، پارامتر مهمی به نام مدول الاستیسیته یا مدول یانگ است که از

ویژگی های مهم یک مصالح محسوب می شود.

$$\sigma = E \varepsilon \quad , \quad E = \tan \alpha$$

σ_p حد تناسب تنش نام داشته و رفتار سازه تا این تنش، به صورت الاستیک و خطی بوده و از قانون هوک

پیروی می کند.

۳- در ناحیه AB ، نمودار تنش - کرنش به صورت خطی نبوده ولی ماده خاصیت الاستیک دارد. به عبارتی در

صورت برداشتن بارگذاری از روی میله، میله به حالت اولیه بازگشته و تغییر شکلی در آن باقی نمی ماند.

تنش در نقطه B ، تنش تسلیم فولاد نام دارد.

۴- در ناحیه BC ، مقاومت قطعه به شدت پایین بوده و بدون افزایش چشمگیر در مقدار نیروی P ، تغییر

شکل قطعه و کرنش آن افزایش می یابد.

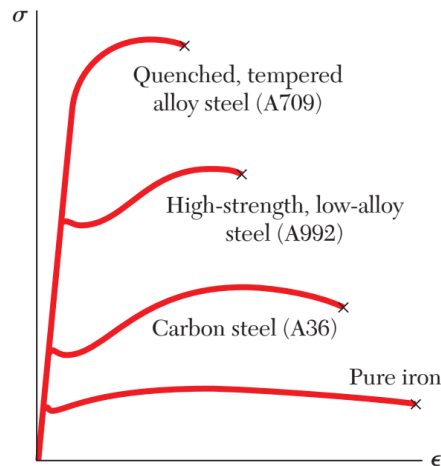
۵- در ناحیه CD که سخت شدگی مجدد (strain hardening) نام دارد، فولاد مجدداً دچار مقاومت شده و

قابلیت تحمل بار پیدا می کند. در این ناحیه با افزایش کرنش، تنش نیز افزایش می یابد.

۶- در نقطه D ، فولاد بیشترین تنش را تجربه کرده که به آن تنش نهایی می گویند و سرانجام در نقطه E ،

نمونه فولادی خراب می شود.

^۱ این مطلب و تعدادی از مطالب دیگر این درسنامه از کتاب راهنمای آزمون کارشناسی ارشد و دکتری مقاومت مصالح انتشارات سری عمران گرفته شده است.

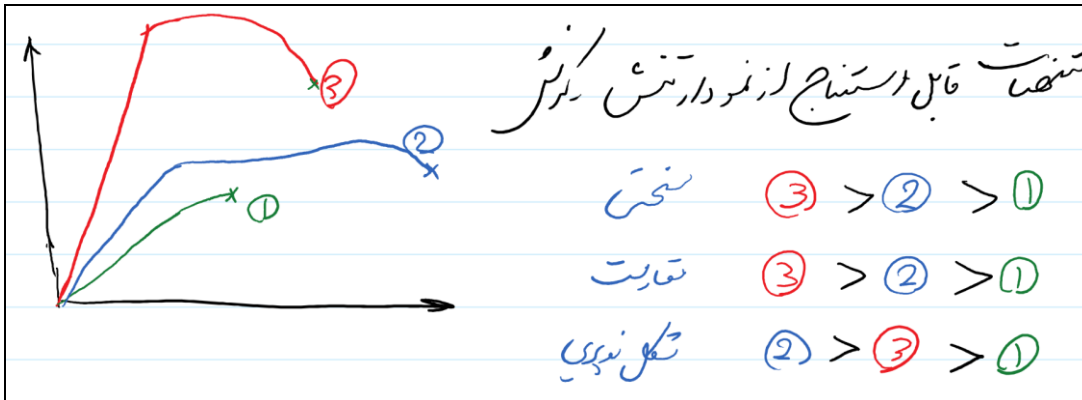


آلیاژ فولاد به عنوان یک مصالح نرم یا شکل پذیر محسوب می شود. بسته به اینکه مقدار درصد کربن این آلیاژ چقدر باشد، مقدار تنش تسلیم، تنش نهایی و شکل پذیری آن فرق می کند. در شکل روبرو دیاگرام تنش کرنش چند نوع فولاد نشان داده شده است. نکته مهم و مشترک در همه آنها این است که ضریب ارتجاعی یکسان است.

سختی: شیب قسمت خطی نمودار تنش کرنش

مقاومت: بیشترین تنش قابل تحمل

شکل پذیری: مقدار تغییر شکل نهایی به تغییر شکل تسلیم

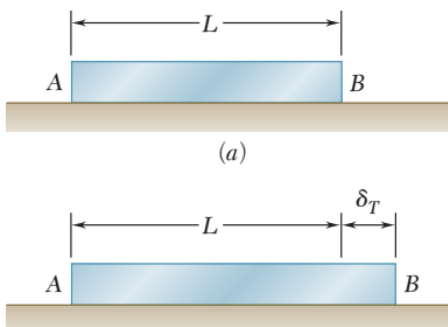


۱- کرنش ناشی از تنش محوری (نرمال)

کرنش ناشی از نیروی محوری وارد بر عضو میله ای، کرنش محوری یا طولی نامیده می شود که قبلاً با آن آشنا شدیم. کرنش (ϵ) و تغییر شکل (δ) ناشی از تنش نرمال برابر است با:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \rightarrow \delta = \epsilon L = \frac{\sigma}{E} \times L$$

۲- کرنش حرارتی



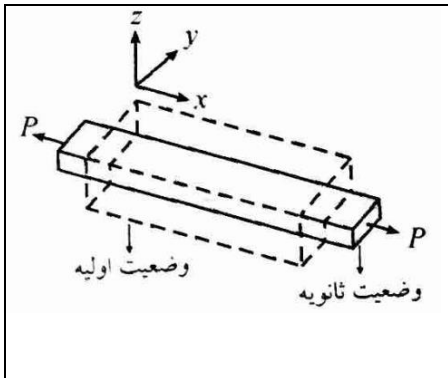
میله ای با طول اولیه L و ضریب انبساط حرارتی α بر روی سطحی بدون اصطکاک قرار گرفته است. اگر دمای این میله به اندازه ΔT افزایش یابد، کرنش (ϵ) و تغییر شکل (δ) ایجاد شده از تغییر دما برابر است با:

$$\epsilon_T = \alpha \Delta T \rightarrow \delta = \epsilon L = \alpha L \Delta T$$

به این کرنش، کرنش حرارتی می گویند.



۳- کرنش جانبی (اثر پواسون)



میله ای را فرض کنید که تحت نیروی محوری کششی P قرار می گیرد. قاعدتا تحت این نیرو انتظار داریم که این میله افزایش طول داشته باشد. ولی علاوه بر این موضوع اتفاق جالب دیگری نیز می افتد. میله نازک می شود. یعنی عرض و ارتفاع آن کاهش می یابد. عکس این موضع نیز صادق است. به این معنی که اگر میله را تحت فشار محوری قرار دهیم، طول آن کم و عرض و ارتفاعش افزایش می یابد، یعنی منبسط می شود.

به این پدیده، اثر پواسون یا کرنش جانبی می گویند.

فرض کنید که در جهت x یک کرنش محوری ناشی از تنش نرمال ایجاد شده است. بنابراین در راستای y و z کرنش های جانبی ایجاد خواهد شد. رابطه بین نسبت کرنش جانبی با کرنش طولی به صورت زیر است:

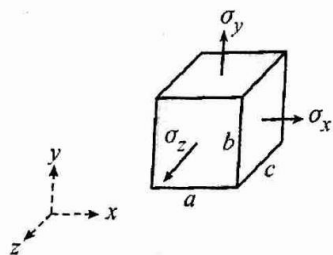
$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \times \epsilon_x$$

مصلح	فولاد	چدن	لاستیک	طلا
نسبت پواسون	۰.۲۷- ۰.۳	۰.۲۱- ۰.۲۶	۰.۵	۰.۴۲- ۰.۴۴

ضریب ν (نو)، با نام **نسبت پواسون** شناخته می شود و در محدوده $۰.۵ > \nu > ۰$ قرار دارد. هر چه ضریب پواسون بیشتر باشد یعنی انبساط یا انقباض جانبی ناشی از نیروی محوری طولی بیشتر است.

کرنش محوری در حالت کلی

با در نظر گیری هر سه آیتم کرنش طولی شامل کرنش ناشی از تنش نرمال، کرنش حرارتی و کرنش جانبی، در یک المان سه بعدی داریم:



$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} + \alpha \Delta T \\ \epsilon_y &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} + \alpha \Delta T \\ \epsilon_z &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} + \alpha \Delta T\end{aligned}$$

به عنوان مثال، برای راستای x، کرنش ها به شرح زیر خواهد بود:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} + \alpha \Delta T$$

کرنش طولی
کرنش جانبی
تنش حرارتی



محاسبه تغییر شکل: تغییر طول، تغییر مساحت و تغییر حجم

حال که با مفهوم کرنش آشنا شدیم، با داشتن شکل اولیه می توانیم، تغییر شکل را به دست آوریم.

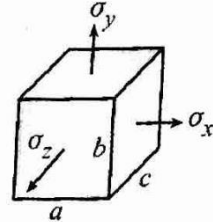
محاسبه تغییر طول

برای به دست آوردن تغییر طول هر یک از ضلع های مکعب کافایت کرنش در راستای آن ضلع در طول اولیه آن ضرب شود:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta a}{a} \Rightarrow \Delta a = a \varepsilon_x \quad (\text{تغییر طول ضلع } a)$$

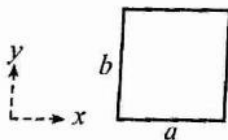
$$\varepsilon_y = \frac{\Delta b}{b} \Rightarrow \Delta b = b \varepsilon_y \quad (\text{تغییر طول ضلع } b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta c}{c} \Rightarrow \Delta c = c \varepsilon_z \quad (\text{تغییر طول ضلع } c)$$



محاسبه تغییر سطح

ورقی مطابق شکل زیر را که در صفحه xy قرار دارد در نظر بگیرید. برای محاسبه کرنش سطحی و تغییر سطح این ورق، با توجه به تکنیک دیفرانسیل گیری در ریاضیات به صورت زیر عمل می کنیم:



$$A = ab \Rightarrow \Delta A = \Delta(ab) = b \Delta a + a \Delta b$$

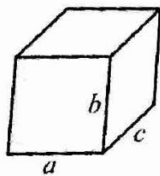
در ادامه با توجه به تعریف کرنش برای یک پارامتر که معادل تغییرات پارامتر تقسیم بر مقدار اولیه آن است، برای محاسبه کرنش سطحی به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\varepsilon_A = \frac{\Delta A}{A} = \frac{b \Delta a + a \Delta b}{ab} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

$$\frac{\Delta a}{a} = \varepsilon_x, \quad \frac{\Delta b}{b} = \varepsilon_y \Rightarrow \boxed{\varepsilon_A = \varepsilon_x + \varepsilon_y}$$

محاسبه تغییر حجم

مکعب رسم شده، در ابتدای این قسمت را در نظر بگیرید. برای محاسبه کرنش حجمی و تغییر حجم این المان، با توجه به تکنیک دیفرانسیل گیری در ریاضیات به صورت زیر عمل می کنیم:



$$V = abc \Rightarrow \Delta V = \Delta(abc)$$

$$\Delta V = bc \Delta a + ac \Delta b + ab \Delta c$$

در ادامه با توجه به مفهوم کرنش، می توان نوشت:

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{bc \Delta a + ac \Delta b + ab \Delta c}{abc} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$$

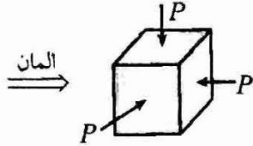
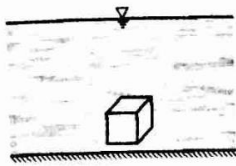
$$\frac{\Delta a}{a} = \varepsilon_x, \quad \frac{\Delta b}{b} = \varepsilon_y, \quad \frac{\Delta c}{c} = \varepsilon_z \Rightarrow \boxed{\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}$$

$$\boxed{\varepsilon_V = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \alpha \Delta T}$$



مدول بالک

فرض کنید که یک المان کوچک با حجم V ، در عمق h از سطح آب دریاچه‌ای قرار گرفته و بر آن فشار هیدرواستاتیک P وارد می‌شود. در این حالت کرنش حجمی المان برابر است با:



$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P$$

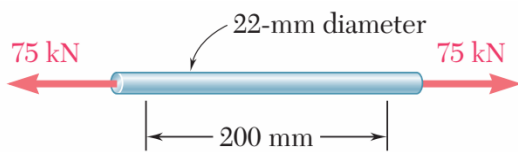
$$\varepsilon_V = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1-2\nu}{E} \times (-3P)$$

گاهی اوقات این رابطه را به صورت زیر نشان داده و K را مدول الاستیسیته حجمی یا مدول بالک می‌نامند.

$$\varepsilon_V = -\frac{3(1-2\nu)P}{E} = -\frac{P}{K} \Rightarrow K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

مثال‌های کاربردی

مثال ۱



یک میله فولادی ($E = 200 \text{ GPa}$ ، $\nu = 0.3$) با قطر ۲۲ میلی‌متر و طول ۲۰۰ میلی‌متر تحت کشش محوری ۷۵ کیلو نیوتن قرار دارد. محاسبه کنید:
الف) تغییر طول میله
ب) تغییر قطر میله

$$\Delta L = \varepsilon_x \times L = \left(\frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \right) L = \frac{\sigma_x}{E} \times L = \frac{P/A}{E} \times L \quad \text{الف)}$$

$$\Delta L = \left(\frac{75000 \text{ N} / \frac{1}{4} \pi \times 22^2 \text{ mm}^2}{200 \times 10^3 \text{ N/mm}^2} \right) \times 200 \text{ mm} = \left(9.87 \times 10^{-4} \right) \times 200 = 0.197 \text{ mm} \quad \varepsilon_x$$

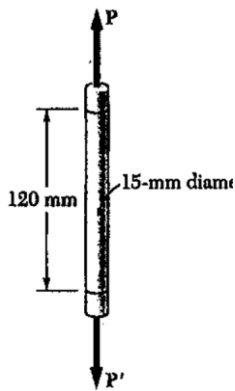
$$\Delta d = \varepsilon_y \times d \quad \text{و} \quad \varepsilon_z \times d = \left(\frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \right) \times L = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \times L \quad \text{ب)}$$

$$\Delta d = -\nu (\varepsilon_x) d = -0.3 \times (9.87 \times 10^{-4}) \times 22 \text{ mm} = (-2.961 \times 10^{-4}) \times 22 = -0.0065 \text{ mm}$$

در این مثال، افزایش طول میله از نوع کرنش محوری است و کاهش قطر آن از نوع کرنش جانبی می‌باشد.



مثال ۲



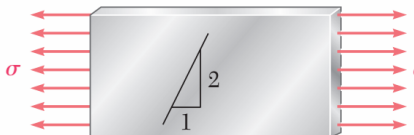
میله ای با قطر ۱۵ mm و طول ۱۲۰ mm، تحت اثر نیروی کشش ۳.۵ kN قرار دارد.
گسترش طولی میله برابر ۱۱ mm، کاهش قطر آن ۰.۶۲ mm باشد، ضریب الاستیسیته و ضریب پواسون را بدست آورید.

$$\delta_x = \epsilon_x \times L \rightarrow \left(\frac{\delta_x}{L} \right) = \frac{\epsilon_x}{1} \rightarrow 11 \text{ mm} = \left(\frac{3.5 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} \times 15^2} \right) \times 120$$

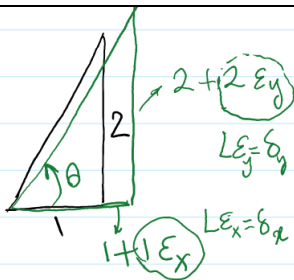
$$\rightarrow E = 216 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 216 \text{ MPa}$$

$$\delta_y = \epsilon_y \times D \quad \epsilon_y = -\nu \epsilon_x \quad \nu = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = \frac{\delta_y / D}{\delta_x / L} = \frac{0.62 / 15}{11 / 120} = 0.451$$

مثال ۳



یک نمونه آلومینیم ($E = 74 \text{ GPa}$, $\nu = 0.33$)، تحت تنش محوری ۱۲۵ MPa قرار می گیرد. قبل از اعمال تنش، مثلث با ضلع ۲:۱ بر روی نمونه رسم می گردد. ضرایب تنش به ۱۲۵ MPa برسد، ضریب مثلث چند خواهد شد؟



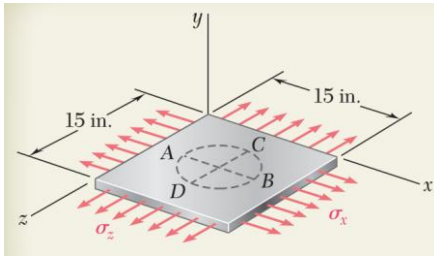
$$\tan \theta = \frac{2 + 2\epsilon_y}{1 + \epsilon_x} = \frac{\text{ارتفاع جدید}}{\text{طول جدید}}$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{125 \text{ MPa}}{74000 \text{ MPa}} = 1.689 \times 10^{-3}$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = -\nu \epsilon_x = -0.33 \times 1.689 \times 10^{-3} = -0.557 \times 10^{-3}$$

$$\tan \theta = \frac{2 - 2 \times 0.557 \times 10^{-3}}{1 + 1.689 \times 10^{-3}} = 1.995$$

$$\tan \theta = \frac{2}{1} = 2$$



بر روی یک صفحه آلومینیم ($E = 10^7 \text{ Psi}$, $\nu = \frac{1}{3}$) با ضخامت $\frac{3}{4} \text{ in}$
 یک دایره به قطر $d = 9 \text{ in}$ رسم شده است. ضایقه حاصلی شکل، منتهی تحت
 تنش های تغییر در یوارترهای زیر را:
 $\sigma_x = 12 \text{ ksi}$, $\sigma_z = 20 \text{ ksi}$ قرار بگیرد، می‌کنند.
 (۱) قطر AB (۲) قطر CD (۳) ضخامت در (۴) حجم در

$$\delta_{AB} = \epsilon_{AB} \times d, \quad \delta_{CD} = \epsilon_{CD} \times d, \quad \delta_t = \epsilon_t \times t, \quad \Delta V = \epsilon_v \times V$$

$$\epsilon_{AB} = \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{10^7 \text{ Psi}} \left(12 \times 10^3 \text{ (Psi)} - \frac{1}{3} \times 20 \times 10^3 \text{ (Psi)} \right)$$

$$\rightarrow \epsilon_x = +0.533 \times 10^{-3}$$

$$\epsilon_{CD} = \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{10^7 \text{ Psi}} \left(20 \times 10^3 \text{ Psi} - \frac{1}{3} \times 12 \times 10^3 \text{ Psi} \right)$$

$$\rightarrow \epsilon_z = +1.6 \times 10^{-3}$$

$$\epsilon_t = \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{10^7 \text{ Psi}} \left(-\frac{1}{3} \times 12 \times 10^3 - \frac{1}{3} \times 20 \times 10^3 \text{ Psi} \right)$$

$$\rightarrow \epsilon_y = -1.067 \times 10^{-3}$$

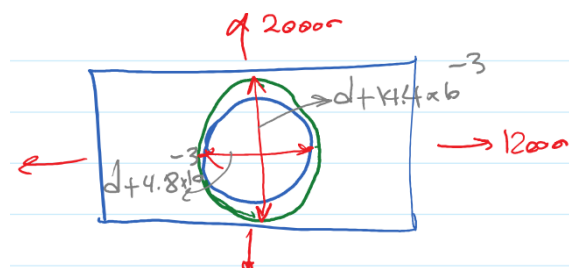
$$\delta_{AB} = \epsilon_x \times d = +0.533 \times 10^{-3} \times 9 \text{ (in)} = +4.8 \times 10^{-3} \text{ (in)}$$

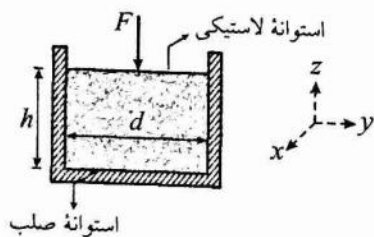
$$\delta_{AC} = \epsilon_z \times d = +1.6 \times 10^{-3} \times 9 \text{ (in)} = 14.4 \times 10^{-3} \text{ (in)}$$

$$\delta_t = \epsilon_y \times t = -1.067 \times 10^{-3} \times \frac{3}{4} \text{ (in)} = -0.8 \times 10^{-3} \text{ (in)}$$

$$\Delta V = \epsilon_v \times V = (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \times V = (0.533 - 1.067 + 1.6) \times 10^{-3} \times (15 \times 15 \times \frac{3}{4})$$

$$\rightarrow \Delta V = +0.187 \text{ in}^3$$





یک استوانه لاستیکی با قطر d و ارتفاع h ، در داخل استوانه‌ای صلب قرار گرفته و نیروی F بر آن وارد می‌شود:

(الف) مقدار فشار بین لاستیک و استوانه صلب چقدر است؟

(ب) میزان تغییر ارتفاع استوانه لاستیکی چقدر است؟

(مدول الاستیسیته لاستیک E و ضریب پواسون آن ν است)

گلبا ریدنه اذل فرض کنیم. طرف صلب استوانه را محسوب نداریم. چه اندازه تغییر ارتفاع استوانه را می‌خواهیم؟



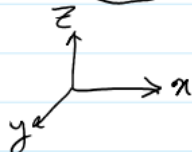
$$\Delta h = h \cdot \epsilon_z$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\epsilon_z = \frac{F/A}{E} = -\frac{F}{AE}$$

در حالت اذل $\Delta h = -\frac{Fh}{AE}$

اما فرض کنیم که استوانه لاستیکی داخل طرف استوانه صلب قرار داده شده.



$$\Delta h = h \cdot \epsilon_z$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} \quad (1)$$

در حالت اول، $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ، که فرض می‌کنیم.

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma$$

باید دنبال کنیم که چه رابطه‌ای بین σ و ϵ_z داریم.

$$\epsilon_x = 0$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = 0$$

$$\frac{\sigma}{E} - \nu \frac{\sigma}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = 0 \rightarrow \sigma = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \quad (2)$$



$$\textcircled{1}, \textcircled{2} : \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{2\nu}{E} \left(\frac{\sigma_x}{1-\nu} \right) \sigma_z = 0 \rightarrow \epsilon_z = \frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu} \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\sigma_z = -\frac{F}{A}$$

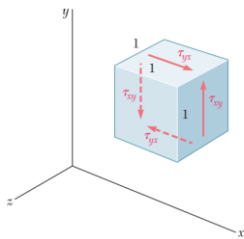
$$\epsilon_z = \left(\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu} \right) \frac{F}{AE}$$

$$\Delta h = \epsilon_z \cdot h = - \left(\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu} \right) \frac{Fh}{AE}$$

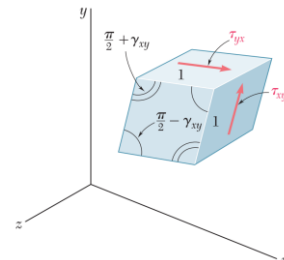
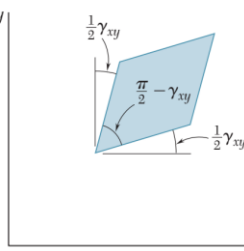
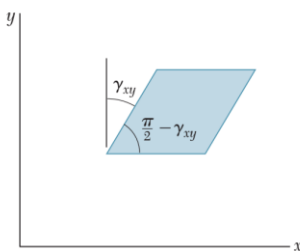
نتیجه Δh در دست راست، رابطه است که فرکانس است در دست راست
اصولاً در صورت فشرده شدن، فرکانس کمتر است، پس نیروی سرازیر دارد.

مثال کاربردی این مفهوم، ستونهای بتنی می باشد. در ستونهای بتنی برای افزایش باربری محوری، محصوریت را زیاد می کنند. این کار با استفاده از دور گیر (خاموت یا میلگردهای عرضی) تامین می شود.

کرنش برشی



در بخش های پیشین کرنش های مطرح شده، از جنس کرنش محوری یا طولی (از جنس تغییر طول) بودند. چنانچه یک المان تحت تنش برشی قرار بگیرد، تغییر شکل ایجاد شده از جنس تغییر زاویه می باشد. مقدار تغییر زاویه المان تحت تنش برشی را با γ نشان داده و کرنش برشی می نامند.



مشابه رابطه هوک، رابطه ای بین تنش برشی و کرنش برشی برقرار است. ضریب G ، مدول برشی نامیده شده و مشابه مدول الاستیسیته می باشد.

$$\tau = G\gamma$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

تنش محوری
مدول الاستیته
کرنش محوری

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

تنش برشی
مدول برشی
کرنش برشی



$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

می توان ثابت کرد که بین E ، G و ν (پارامترهای ذاتی مصالح) رابطه روبرو برقرار است:

• نسبت مدول برشی به مدول الاستیسیته G/E برای تمام مصالح بین 0.33 تا 0.5 است:

$$\frac{G}{E} = \frac{1}{2(1+\nu)}$$

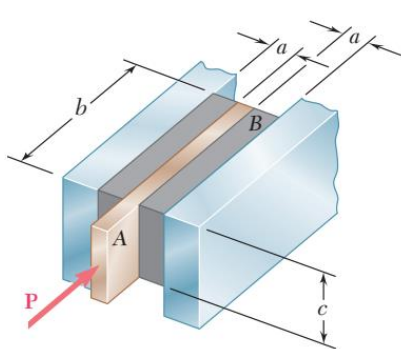
$$0 \leq \nu < \frac{1}{2} \rightarrow \text{می دانیم که}$$

$$1 \leq 1+\nu < \frac{3}{2}$$

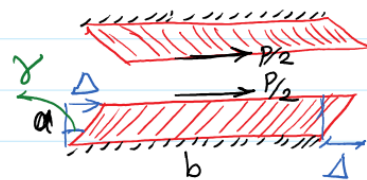
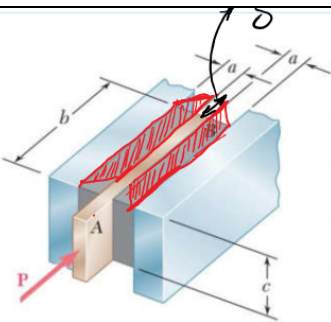
$$2 \leq 2(1+\nu) < 3$$

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2(1+\nu)} \leq \frac{1}{2}$$

مثال ۶



صفحه AB توسط دو قطعه لاستیکی مطابق شکل به یکدیگر متصل و مجاور متصل شده است. مدول ارتجاعی قطعه لاستیکی $G = 12 \text{ MPa}$ و یا راسته c برابر 100 mm می باشد. طول ابعاد لاستیک a ، b را طوری تعیین کنید که تحت نیروی $P = 45 \text{ kN}$ ، تنش برشی از 1.4 MPa تجاوز نکند و قطعه AB بتواند حداقل 5 mm جابجا شود.



(الف)

$$\tau \leq \tau_{all} \rightarrow \frac{P/2}{A} = \frac{45000/2}{A} \leq 1.4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$A \geq 16070 \text{ mm}^2$$

$$bc = 100b \geq 16070 \rightarrow b \geq 160.7 \text{ mm}$$

$$\Delta \geq 5 \text{ mm}$$

$$\gamma = \frac{\Delta}{a} \rightarrow a = \frac{\Delta}{\gamma} \rightarrow a = \frac{\Delta}{\gamma_{max}} \quad (\text{ب})$$

$$\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G} = \frac{1.4 \text{ MPa}}{12 \text{ MPa}} = 0.117$$

$$a_{min} = \frac{5 \text{ mm}}{0.117} = 42.7 \text{ mm}$$



در سطل نون اگر $a = 50 \text{ mm}$ باشد و نیروی $F = 200 \text{ kN}$

مقدار صاف شدن در AB در راستای نیروی F محاسبه

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{200000}{160.7 \times 100} = 12.44 \text{ MPa}$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{12.44}{12} = 1.04$$

$$\gamma = \frac{\Delta}{a} \rightarrow \Delta = \gamma \times a = 1.04 \times 50 = 51.8 \text{ mm}$$

زندگی، حس شگوفایی یک مزرعه، در باور بند

زندگی، باور دریاست در اندیشه ماهی، در تنگ

زندگی، ترجمه روشن خاک است، در آینه عشق

زندگی، فهم نفهمیدن هست

زندگی، پنجره ای باز، به دنیای وجود

تا که این پنجره باز است، جهانی با ما است

آسمان، نور، خدا، عشق، سعادت با ما است

فرصت بازی این پنجره را دریابیم

در بندیم به نور، در بندیم به آرامش بر مهر نسیم

پرده از ساحت دل برگیریم

رو به این پنجره، باشوق، سلامی بکنیم

زندگی، رسم پذیرایی از تقدیر است