

دانشگاه سواد

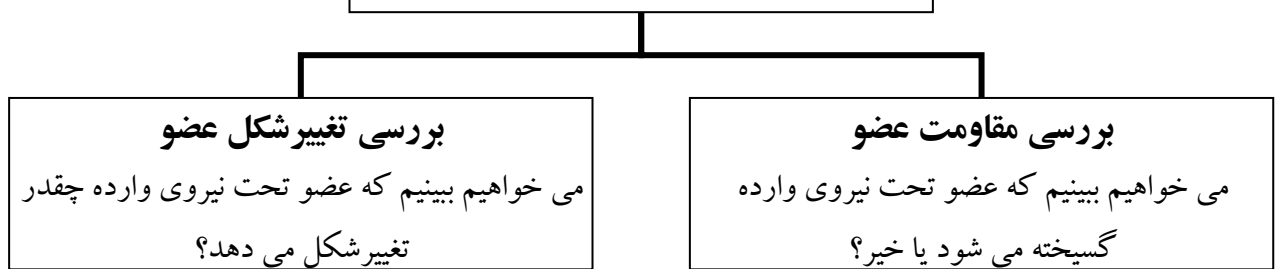
مقاومت مصالح

مبحث اول:

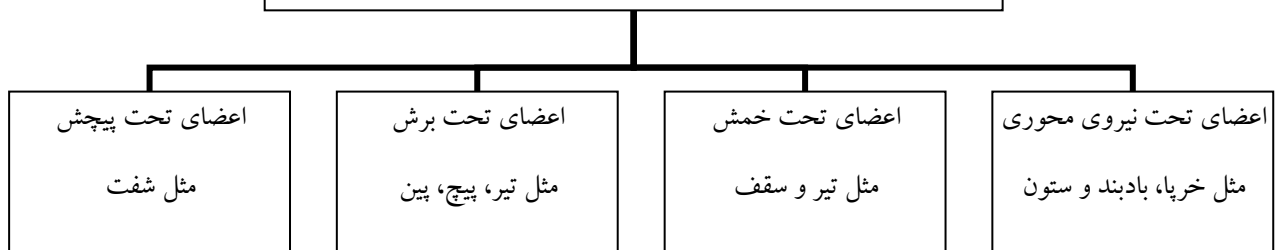
تشریح

مدرس: دکتر محمد رضا میرجلیلی

موضوعات اصلی درس مقاومت مصالح



انواع اعضای سازه ای از نظر نوع نیروی داخلی ایجاد شده در آنها



شکست پیچ تحت برش



شکست میله تحت نیروی محوری



شکست تیر بتنی تحت برش



شکست تیر بتنی تحت خمش

آشنایی با مفهوم تنش - Stress

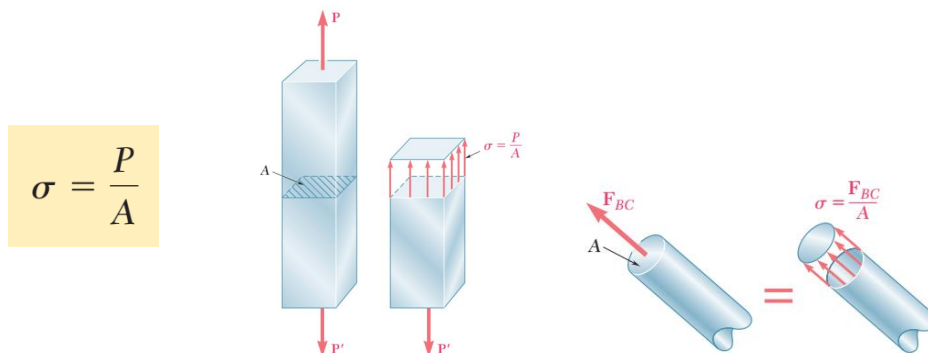
تنش، شدت نیرو در واحد سطح است. تقریباً ماهیتی مشابه کمیت فشار دارد، با این تفاوتها:

۱- فشار اسکالر است، ولی تنش ماهیت برداری دارد.

۲- فشار در سطح بیرونی جسم و از طرف نیروی خارجی ایجاد می شود، در حالی که تنش در سطح مقطع داخل عضو و ناشی از نیروی داخلی است.

۳- فشار همیشه بر سطح مورد نظر عمود است، ولی تنش می تواند نسبت به سطح مورد بررسی زاویه داشته باشد.

فعلاً فرض کنید که می خواهیم تنش وارد بر سطح عمود بر محور طولی یک عضو تحت نیروی محوری را حساب کنیم. در این حالت برای راحتی کار فرض می کنیم که توزیع تنش در سطح مورد نظر یکنواخت است. داریم:



همان گونه که مشاهده می شود، تنش از جنس نیرو بر سطح بوده و واحدهای رایج آن در مهندسی عمران عبارت است از:

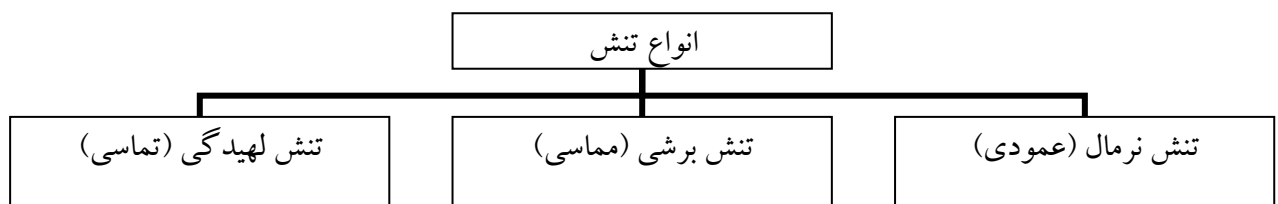
$$SI \text{ سیستم: } 1 \frac{N}{m^2} = 1 Pa, \quad 1 \frac{N}{mm^2} = 10^6 \frac{N}{m^2} = 1 MPa$$

$$MKS \text{ سیستم: } 1 kgf/cm^2 = 0.1 MPa, \quad 1000 kgf/cm^2 = 1 ton/cm^2$$

$$\text{سیستم انگلیسی: } 1 lb/in^2 = psi, \quad 1 klb/in^2 = ksi = 1000 psi$$

توجه: در این کلاس، ما از واحد N/mm^2 و یا همان MPa استفاده می کنیم. بدین منظور در تمام مسائل و مثالها واحد طول را mm و واحد نیروی را N در نظر بگیرید.

بسته به اینکه نیرو و سطح مورد بررسی چه زاویه ای نسبت به هم داشته باشند، تنش های متفاوتی نامگذاری می شوند:





۱- تنش نرمال (عمود بر سطح) - Normal Stress

در این حالت، نیروی وارده و سطح مورد بررسی بر هم عمود هستند.

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

تعریف دقیق تنش نرمال عبارت است از میزان نیروی عمودی وارد بر سطح بسیار کوچک.

در علم مهندسی، برای محاسبه تنش فرض می کنیم که توزیع

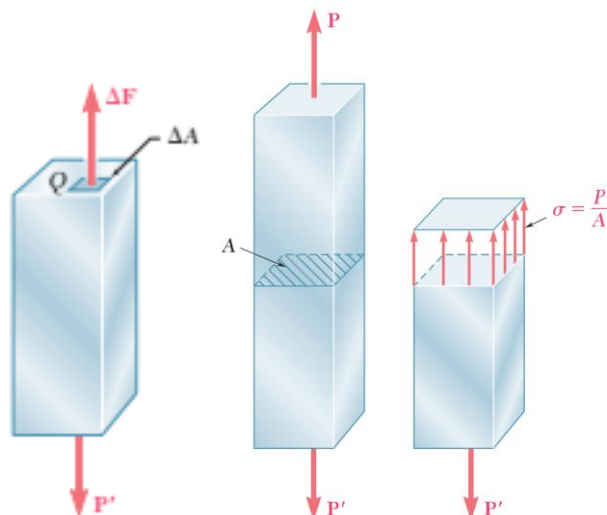
آن در سطح مورد نظر یکنواخت است. به این تنش، تنش میانگین می گوئیم.

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

از این به بعد هر جا گفته شد، تنش، منظور تنش میانگین است.

بعدا در رابطه با صحت فرض ساده کننده فوق (توزیع یکنواخت

تنش در سطح) بیشتر بحث می کنیم.



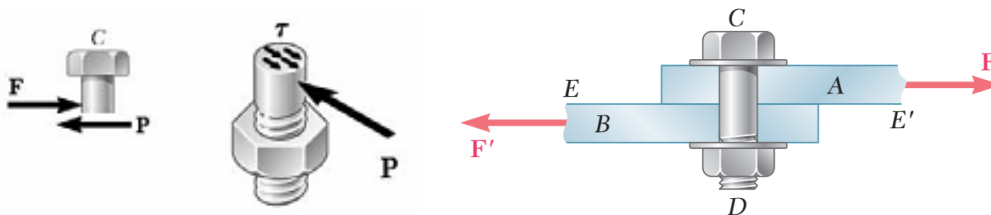
۲- تنش برشی (مماس بر سطح) - Shear Stress

در این حالت، نیروی وارده و صفحه مورد بررسی موازی هم می باشند. به عبارت دیگر نیرو بر صفحه مورد نظر مماس است.

$$\tau_{ave} = \frac{P}{A}$$

تنش برشی میانگین به صورت روبرو تعریف می شود:

دقت کنید، تفاوت این رابطه با رابطه تنش نرمال این است که در این جا نیروی P موازی صفحه است.



۳- تنش لهیدگی (تماسی) - Bearing Stress

در این حالت، تنش در سطح تماس دو جسم اتفاق می افتد. به همین دلیل به آن تنش

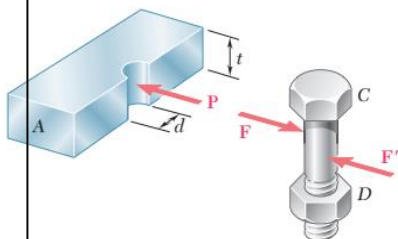
اتکایی یا تماسی می گویند. واضح است که وقتی دو جسم به هم فشار می آورند، این تنش

ایجاد می شود، برای همین به آن تنش لهیدگی هم می گویند.

وقتی مشابه شکل، سطح تماس به صورت مدور باشد، مساحت A در

واقع سطح تصویر عمود بر نیروی وارده می باشد. بنابراین در

این حالت، تنش لهیدگی برابر است با:



$$\sigma_b = \frac{P}{A}$$

$$\sigma_b = \frac{P}{A} = \frac{P}{td}$$



تنش مجاز، تنش نهایی، مقاومت (بار نهایی)

در بخش قبل، تنش وارد بر سطح مقطع یک عضو تحت نیروی داخلی را محاسبه کردیم. برای این که دریابیم که این شدت از نیرو و تنش منجر به گسیختگی عضو می شود یا خیر، باید تنش به دست آمده را با تنش قابل تحمل عضو مقایسه کنیم. به این پارامتر، **تنش نهایی** می گوئیم که به جنس عضو بستگی دارد. در مقاصد طراحی، نباید بگذاریم تا تنش ایجاد شده در عضو، به تنش نهایی نزدیک شود، بلکه باید یک حاشیه اطمینانی با آن داشته باشد. از این رو با در نظرگیری یک **ضریب اطمینان**، تنش نهایی را کاهش می دهیم و به آن **تنش مجاز** می گوئیم.

تنش نهایی (σ_u ultimate stress): حداکثر تنشی که برای عضو قابل تحمل است و بیش تر از آن باعث گسیختگی می شود. این پارامتر فقط به جنس عضو بستگی دارد.

تنش مجاز (σ_{all} allowable stress): حداکثر تنشی که برای عضو مجاز دانسته شده است. این حد از تنش نسبت به تنش نهایی کمتر است. به دلیل اینکه می خواهیم یک حاشیه اطمینان تا گسیختگی داشته باشیم.

تنش موجود (σ): تنشی که طبق روابط بخش قبلی بسته به نیرو و سطح مقطع عضو در آن به وجود می آید و باید از تنش مجاز کمتر باشد.

ضریب اطمینان ($F.S. = \text{Factor of Safty}$): ضریبی است بزرگتر از یک برای در نظرگیری حاشیه اطمینان در طراحی. با تقسیم تنش نهایی بر آن، تنش مجاز به دست می آید. مقدار آن بستگی به حساسیت طراحی، نوع گسیختگی و ... دارد که توسط آیین نامه های طراحی مشخص می شود. هر چه این ضریب بزرگتر باشد، طراحی ایمن تر است.

منظور از طراحی یک عضو تحت بار وارده، این است که تنش موجود از تنش مجاز کمتر باشد ($\sigma \leq \sigma_{all}$)، بدین منظور سه راهکار زیر در طراحی می تواند به کار گرفته شود:

۱- نیرو کاهش یابد. (کاهش σ): این راهکار زیاد عملی نیست زیرا عموماً نیرو در اختیار ما نیست.

۲- سطح مقطع افزایش یابد. (کاهش σ): پرکاربردترین گزینه همین است.

۳- جنس عضو عوض شود. (افزایش σ_{all}): به عنوان مثال از مصالح مقاومتر استفاده شود.

از طرفی در طراحی، مفاهیم بار مجاز و بار نهایی وجود دارد:

بار نهایی (مقاومت نهایی): معرف بیشترین باری است که می توان به عضو وارد کرد تا گسیخته نشود. ($P_u = \sigma_u \cdot A$)

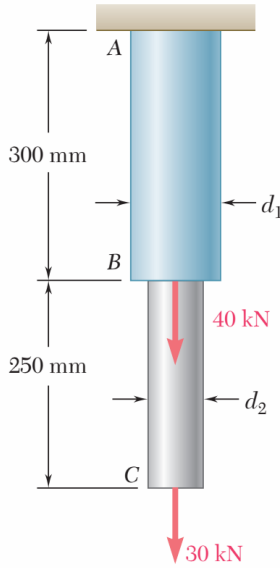
بار مجاز (مقاومت مجاز): معرف بیشترین باری است که مجازیم به این عضو وارد کنیم. ($P_{all} = \sigma_{all} \cdot A$)

یعنی ما می توانیم در طراحی ۱- تنش موجود را با تنش مجاز مقایسه کنیم یا اینکه ۲- بار موجود را با مقاومت مجاز مقایسه کنیم. هر دو روش مشابه هم بوده و در مسائل استفاده می شوند.



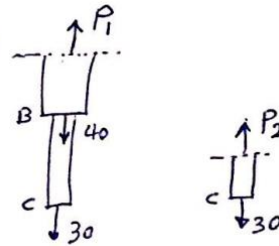
مثال های کاربردی

مثال ۱: تنش نرمال



دو میله AB و BC در نقطه B به یکدیگر جوش شده اند، مطابق شکل تحت اثر در نیروی متمرکز قرار گرفته اند. چنانچه تنش مجاز نرمال در میله AB برابر ۱۷۵ مگاپاسکال و در میله BC برابر ۱۵۰ مگاپاسکال باشد، کوچکترین مقدارهای بزرگ قطر میله ها را تعیین کنید.

$$\begin{aligned}
 \text{نیروی محوری میله AB} &= P_1 = 40 + 30 = 70 \text{ کلو نیوتن (T)} \\
 \text{نیروی محوری میله BC} &= P_2 = 30 \text{ کلو نیوتن (T)}
 \end{aligned}$$



توضیح: در این مسئله نیروی محوری در محدوده ۱ مورد نظر، در هر قسمت یک مقطع می زنیم. به این ترتیب سیستم به دو قسمت تقسیم می شود. معمولاً قسمتی را که یک سر آن آزاد است انتخاب کرده و آن را جداگانه بررسی می کنیم. به این ترتیب که نیروی محوری را به صورت کشش (به سمت بالا خط مثبت) و از آنجا که در این مسئله، مقدار آن را به دست می آوریم.

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A_1} \leq \sigma_{all,1} \rightarrow \frac{70 \times 10^3 \text{ (N)}}{\frac{1}{4} \pi d_1^2 \text{ (mm}^2\text{)}} \leq 175 \left(\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right) \rightarrow d_1 \geq 22.6 \text{ mm}$$

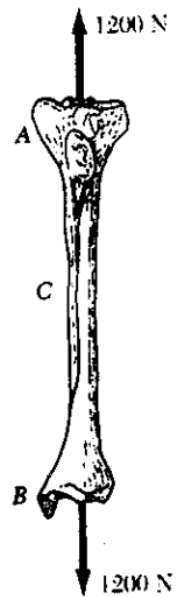
$$\sigma_2 = \frac{P_2}{A_2} \leq \sigma_{all,2} \rightarrow \frac{30 \times 10^3 \text{ (N)}}{\frac{1}{4} \pi d_2^2 \text{ (mm}^2\text{)}} \leq 150 \left(\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right) \rightarrow d_2 \geq 16 \text{ mm}$$

مثال ۲:
تنش نرمال

شکل زیر یک استخوانی که تحت نیروی کشش 1200 N قرار دارد، نشان می‌دهد. تنش ایجا بر شده از این نیرو در نقطه C، 3.8 MPa است. سطح استخوان در این ناحیه یک دایره توخالی به قطر بیرونی 25 mm می‌باشد. قطر داخلی را حساب کنید.

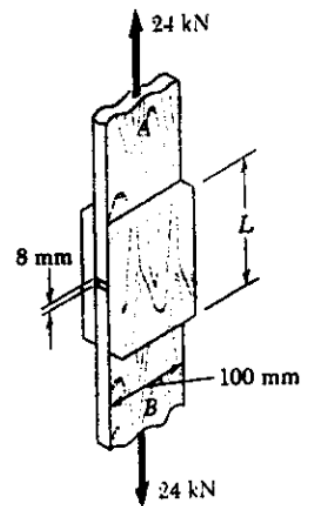
$$\sigma = \frac{P}{A} \rightarrow A = \frac{P}{\sigma} = \frac{1200 \text{ N}}{3.8 \left(\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right)} = 315.8 \text{ mm}^2$$

$$A = \frac{1}{4} \pi (d_{\text{out}}^2 - d_{\text{in}}^2) = \frac{1}{4} \pi (25^2 - d_{\text{in}}^2) = 315.8 \rightarrow d_{\text{in}} = 14.9 \text{ mm}$$

مثال ۳: تنش برشی
در اتصال چسبی

قطعات چوبی A و B به واسطه دو قطعه چوبی و چسب مطابق شکل به یکدیگر متصل شده‌اند. ناصه کردن بین دو قطعه A و B، ۸ میلی‌متر است. کمترین تعداد قطعه L برای قطعات دایره چند برابری باشد تا چسب تحمل کشش نیروی محوری دارد به سیستم را دارا شده باشد؟ (تنش مجاز چسب 800 kPa)

به دلیل وجه در سطح برش، نیروی 24 kN بین این دو قسم می‌شود. بنابراین نیروی 12 kN در سطح تماس مشترک قطعه A و قطعه واسطه چسب می‌شود.



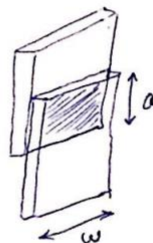
$$A = a \times w$$

$$\tau = \frac{V}{A} \leq \tau_{\text{all}}$$

$$\rightarrow \frac{12000 \text{ (N)}}{a \times w \text{ (mm}^2\text{)}} \leq 0.800 \left(\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right)$$

$$a \times 100 \geq \frac{12000}{0.8} \rightarrow a \geq 150 \text{ mm}$$

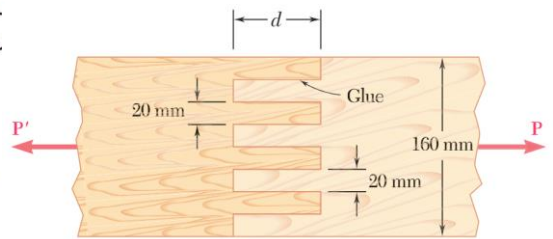
$$L \geq 2a + \text{gap} \rightarrow L \geq 2 \times 150 + 8 = 308 \text{ mm}$$





مثال ۴: تنش برشی در اتصال چسبی

دو تخته با ضخامت 22 mm و پهنای 160 mm ، مطابق شکل زیر به هم چسبیده اند. تنش مجاز چوب در حالت برش 820 kPa است. کمترین مقدار طول d که برای آنکه دو تخته در برش مخوری $P = 7.6 \text{ kN}$ از هم جدا نشوند، چقدر است؟

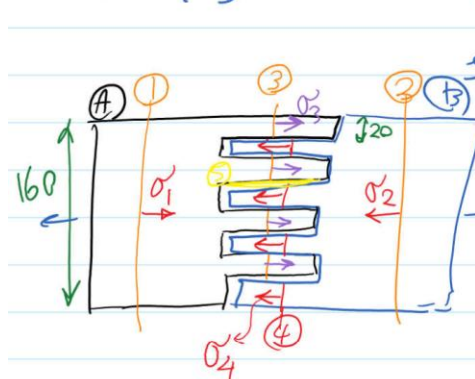


مطابق شکل، ۷ سطح تماس داریم. پس نیروی بین این سطوح تقسیم می‌شود.

$$\tau = \frac{V}{A} = \frac{7.6/7}{22 \times d} \leq 0.820 \left(\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right)$$

$$\rightarrow d \geq 60.2 \text{ mm}$$

در مثال قبلی، به چگونگی تنش در تیرهای چسبیده در یکدیگر.



تنش نرمال در A

$\sigma_1 = A$

تنش نرمال در B

$\sigma_2 = B$

تنش برشی در چسب

$\tau_5 =$

سوال = به ازای هر سیستم فوق، چگونگی تنش را بیان کنید.

$$\sigma_3 \leq \sigma_{all, A}$$

$$\sigma_4 \leq \sigma_{all, B}$$

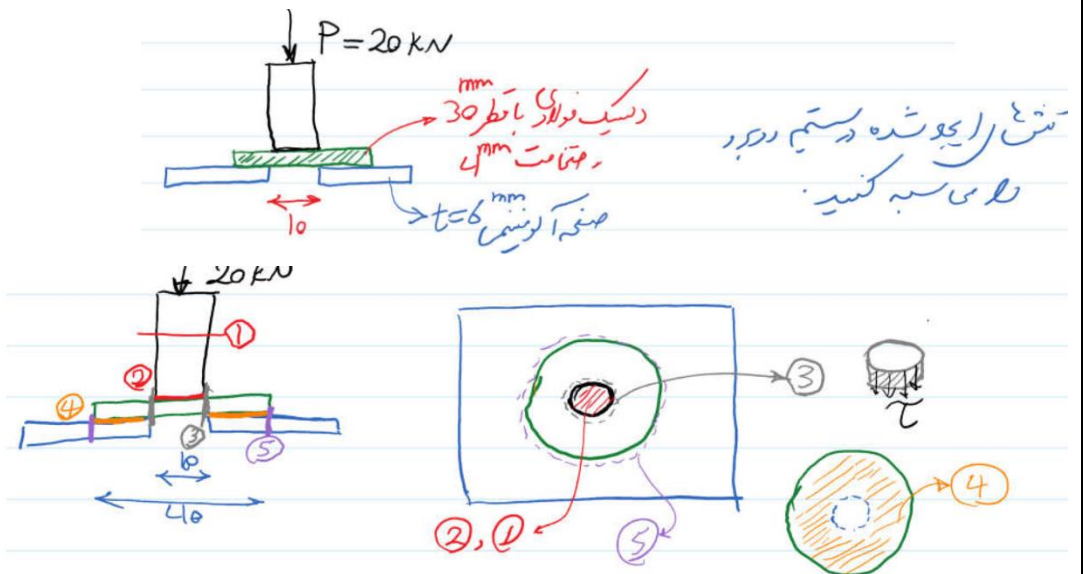
$$\tau_5 \leq \tau_{all, \text{چسب}}$$

سوال - آیا در سیستم فوق تنش کمتری هم داریم؟

جواب: خیر، چون در نقطه‌ای که چسب به چسب نرسیده است، تنش کمتری داریم.

و در آنجا که چسب به چسب نرسیده است، تنش کمتری داریم.

مثال ۵- تنش لہیدگی



sec ① : تنش زوال : $\sigma_1 = \frac{P}{A_1} = \frac{20 \times 10^3 \text{ (N)}}{\frac{1}{4} \pi \times 10^2 \text{ (mm}^2\text{)}} = 254.7 \text{ MPa}$

sec ②: $\sigma_{2b} = \frac{P}{A_2} = \frac{P}{A_1} = \sigma_1 = 254.7 \text{ MPa}$

Sec ③ : تنش کششی : $\tau_3 = \frac{V}{A} = \frac{P}{\pi D \times h} = \frac{20 \times 10^3 (N)}{\pi \times 10 \times 4 (mm^2)} = 159 \text{ N}$

Sec ④: تنش کششی $\sigma_{4b} = \frac{P}{A_4} = \frac{20 \times 10^3 \text{ (N)}}{\frac{1}{4} \pi (30^2 - 10^2)} = 31.8 \text{ MPa}$

Sec ⑤ : تنش برشی : $\tau_s = \frac{V}{A} = \frac{P}{\pi D x h} = \frac{20 \times 10^3 (N)}{\pi \times 30 \times 6 (mm^2)} = 35.4$

ادامہ مثال فوق : اگر تینوں مجاز سیم فوق ہر سطح پر یکساں ہے، جیسے انعامی ہر سیم

$$\sigma_{\text{all, res}} = 300 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ball, \underline{me}} = 200 \text{ MPa}, \quad \sigma_{b, all, \underline{gr}} = 400 \text{ MPa}, \quad \sigma'_{ball, Al.} = 20 \text{ MPa}$$

$$\tau_{all, Cu} = 270 \text{ MPa}, \quad \tau_{all, Al} = 30 \text{ MPa}$$



برای کنترل کیفیت تنش، در اکثر نسبت تنش مهم به تنش مجاز را می‌گیریم.
اگر این نسبت بزرگتر از 1 باشد، به معنی تجاوز تنش از حد مجاز خود است. در نتیجه
بزرگتر باشد، خطر تر است.

$$\textcircled{1} \quad \text{نسبت تنش فول در میله} : Ratio_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_{all}} = \frac{254.7}{300} = 0.85$$

$$\textcircled{2-1} \quad \text{تنش کششی میله} : Ratio_{2-1} = \frac{\sigma_{2b}}{\sigma_{2b,all}} = \frac{254.7}{200} = 1.27$$

$$\textcircled{2-2} \quad \text{تنش کششی دیگ} : Ratio_{2-2} = \frac{\sigma_{2b}}{\sigma_{2b,all}} = \frac{254.7}{400} = 0.64$$

$$\textcircled{3} \quad \text{تنش برشی دیگ} : Ratio_3 = \frac{\tau_3}{\tau_{all}} = \frac{159}{270} = 0.59$$

$$\textcircled{4-1} \quad \text{تنش کششی آکریست (دیگ)} : Ratio_{4-1} = \frac{\sigma_{4b}}{\sigma_{4b,all}} = \frac{31.8}{20} = 1.59$$

$$\textcircled{4-2} \quad \text{تنش کششی دیگ (بالون)} : Ratio_{4-2} = \frac{\sigma_{4b}}{\sigma_{4b,all}} = \frac{31.8}{400} = 0.08$$

$$\textcircled{5} \quad \text{تنش برشی آکریست} : Ratio_5 = \frac{\tau_5}{\tau_{all, Al}} = \frac{35.4}{30} = 1.18$$

ادامه مثال: فرض کنید قطر میله داده شده به قطر دیگ و دیگ

$$\sigma_1 = \frac{P}{A_1} = \frac{20000}{\frac{1}{4} \pi d^2} \leq \sigma_{all, \text{میله}} = 300$$

$$\rightarrow \frac{1}{4} \pi d^2 \geq \frac{20000}{300} = 66.7$$

$$d^2 \geq \frac{66.7 \times 4}{\pi}, \quad d \geq 9.2 \text{ mm}$$

کنترل دوم: تنش کششی دیگ

$$\sigma_{2b} = \frac{P}{A_2} = \frac{20000}{\frac{1}{4} \pi d^2} \leq \sigma_{2b,all} = 400$$

در نتیجه به تنش کششی میله، به کنترل کشش میله.

کنترل سوم: تنش کششی میله

$$\sigma_{2b} = \frac{P}{A_2} = \frac{20000}{\frac{1}{4} \pi d^2} \leq \sigma_{2b,all, \text{میله}} = 200$$

$$\rightarrow \frac{1}{4} \pi d^2 \geq \frac{20000}{200} = 100 \rightarrow$$

$$d^2 \geq \frac{400}{\pi} \rightarrow d \geq 11.3 \text{ mm}$$



نیزابع مقدار d ، بزرگترین مقدار d مناسب از میان فوق‌الذکر

$$d \geq (9.2, 11.3, 8) = 11.3$$

$$\boxed{US \ 8 \ d = 12 \text{ mm}}$$

۱) مثال فوق: قدرت دایک براساس معیار بارگذاری

جواب: کنترل تنش برشی در دایک (۳)

قدرت اکوتیم براساس معیار بارگذاری $\leftarrow$ تنش برشی اکوتیم (۳)

قطر دایک $\leftarrow$ تنش کششی در سوراخ اکوتیم (۳)

تنش برشی اکوتیم (۳)

تقریب $\leftarrow$ تنش زل میله σ_{ϕ}

تنش کششی میله σ_{ϕ}

تنش کششی در سوراخ میله σ_{ϕ}

مثال ۶- تنش نرمال، برشی و لهیدگی در اتصال پیچی

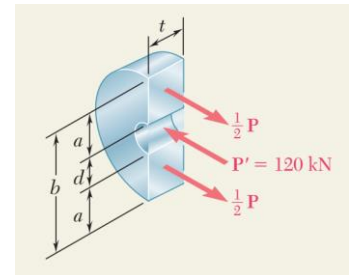
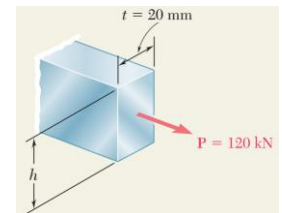
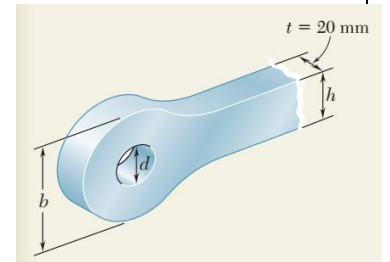
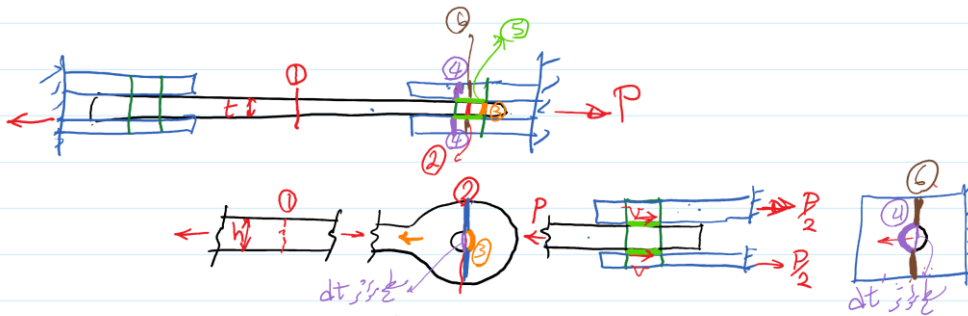
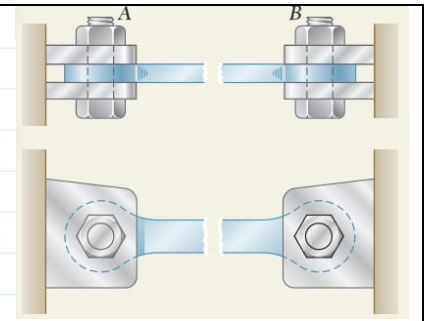
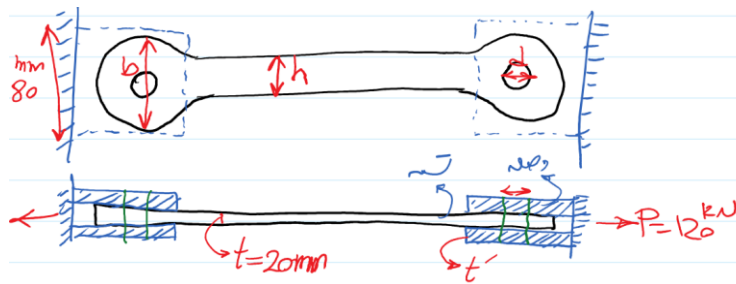
یک تسمه فولادی به ضخامت 20 mm و پهنای h که نیروی کششی $P = 120 \text{ kN}$ را تحمل می‌کند، توسط ورق‌های دایره‌ای دایره دایره، نیروی خود را به یکدیگر می‌دهد. A و B نشان می‌دهند. ابعاد زیر را در نظر بگیرید:

$$\sigma_{b,all} = 350 \text{ MPa}, \tau_{all} = 100 \text{ MPa}, \sigma_{all} = 175 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{b,all} = 375 \text{ MPa}, \sigma_{b,all} = 425 \text{ MPa}, \sigma_{b,all} = 425 \text{ MPa}$$

موارد زیر را محاسبه کنید.

- ۱- قطر میخ (d) - ۲- پهنای تسمه در محل اتصال (b) - ۳- پهنای تسمه (h) - ۴- ضخامت ورق



$$\textcircled{1} \text{ تنش برشی در تسمه } \sigma_1 = \frac{P}{ht} = \frac{120000}{h \times 20} \leq \sigma_{\text{all, برشی}} = 175 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow h \geq \frac{120000}{20 \times 175} = 34.3 \text{ mm}$$

$$\textcircled{2} \text{ تنش برشی در محل اتصال } \sigma_2 = \frac{P}{t(b-d)} = \frac{120000}{20(b-d)} \leq \sigma_{\text{all, برشی}} = 175 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow (b-d) \geq \frac{120000}{20 \times 175} = 34.3 \text{ mm}$$

$$\text{با توجه به } d=28 \text{ mm} \rightarrow (b-28) \geq 34.3 \rightarrow b \geq 62.3 \text{ mm}$$

$$\textcircled{3} \text{ تنش کششی در تسمه } \sigma_{b,3} = \frac{P}{dt} = \frac{120000}{d \times 20} \leq \begin{cases} \sigma_{b, \text{all, کششی}} = 350 \text{ MPa} \\ \sigma_{b, \text{br, کششی}} = 425 \text{ MPa} \end{cases}$$

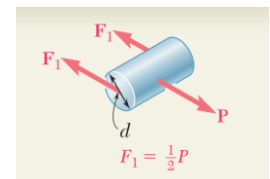
$$\rightarrow d \geq \frac{120000}{20 \times 350} = 17.14 \text{ mm}$$

$$\textcircled{4} \text{ تنش کششی در محل اتصال } \sigma_{b,4} = \frac{P/2}{dt'} = \frac{120000/2}{dt'} \leq \begin{cases} \sigma_{b, \text{all, کششی}} = 375 \text{ MPa} \\ \sigma_{b, \text{br, کششی}} = 425 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$dt' \geq \frac{60000}{375} = 160$$

$$\textcircled{5} \text{ تنش برشی در تسمه } \tau = \frac{P/2}{\frac{1}{4} \pi d^2} = \frac{120000/2}{\frac{1}{4} \pi d^2} \leq \tau_{\text{all, برشی}} = 100 \text{ MPa}$$

$$d^2 \geq \frac{60000 \times 4}{\pi \times 100} = 764 \rightarrow d \geq 27.6 \text{ mm}$$





$$\textcircled{6} \quad \sigma_6 = \frac{P/2}{(80-d) \times t'} = \frac{60000}{(80-d) \times t'} \leq \sigma_{\text{allow}} = 190 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow (80-d) \times t' \geq \frac{60000}{190} = 315$$

$$\tau_5, \sigma_{b,4}, \sigma_{b,3}, \sigma_2 \leftarrow \text{منابع: قطر پیچ (d)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{b,3} \rightarrow d \geq 17.14 \\ \tau_5 \rightarrow d \geq 27.6 \end{array} \right. \rightarrow d \geq 27.6 \rightarrow \boxed{\text{USE } d = 28 \text{ mm}}$$

$$\sigma_2 \rightarrow \text{منابع: درجه اول (b)} \leftarrow b \geq 62.3 \text{ mm} \rightarrow \boxed{\text{USE } b = 65 \text{ mm}}$$

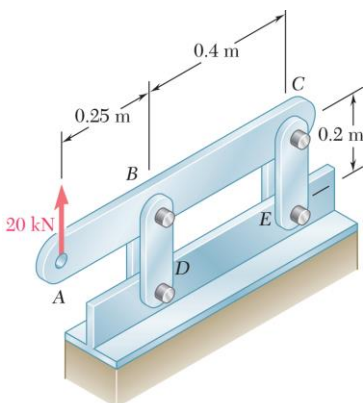
$$\sigma_1 \rightarrow h \geq 34.3 \rightarrow \boxed{\text{USE } h = 35 \text{ mm}} \quad \text{منابع: (h)}$$

$$\sigma_1 \rightarrow h \geq 34.3 \rightarrow \boxed{\text{USE } h = 35 \text{ mm}} \quad \text{منابع: (h)}$$

و ضوابط دهنده (t')

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{b,4} \rightarrow dt' \geq 160 \rightarrow t' \geq \frac{160}{28} = 5.7 \text{ mm} \\ \sigma_6 \rightarrow (80-d)t' \geq 315 \rightarrow t' \geq \frac{315}{80-28} = 6.06 \text{ mm} \end{array} \right. \rightarrow \boxed{\text{USE } t' = 6 \text{ mm}}$$

مثال ۷- تنش نرمال، برشی و لهدگی در اتصال پیچی

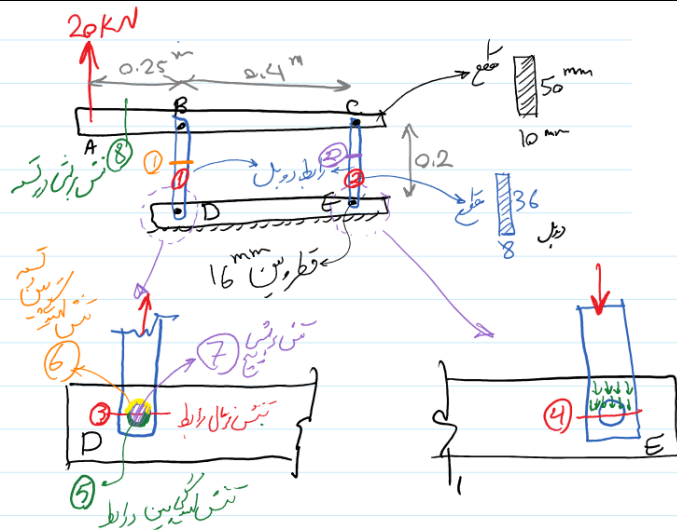


در سیستم شکل زیر داده شده، مقطع عضو ABC، مستطیل $10 \times 50 \text{ mm}$ و مقطع انحنای رابط قائم مستطیل $8 \times 36 \text{ mm}$ می باشد. قطر پیچ ها 16 mm است. مقادیر تنش نرمال و برشی را در زیر محاسبه کنید:

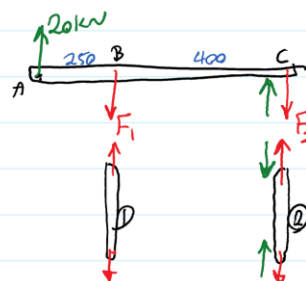
۱- تنش نرمال در کینک (عضو رابط) BD و CG

۲- تنش برشی در پیچ B

۳- تنش کششی بین پیچ B و نقطه ABC



استراده بریده و بخش کنیم و نیروها را در هر یک از این بریده ها پیدا کنیم.



$$\sum M_C = 0 \rightarrow 20 \times 650 - 400 F_1 = 0 \rightarrow F_1 = 32.5 \text{ kN} \quad (+)$$

نیروی محوری رابط ① کشش می باشد.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 20 - 32.5 - F_2 = 0 \rightarrow F_2 = -12.5 \text{ kN}$$

(C) نیروی محوری رابط ② فشار می باشد.

$$\text{sec ①: تنش نرمال در رابط ①: } \sigma_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{32.5 \times 10^3}{2 \times (8 \times 36)} = 56.4 \text{ MPa} \text{ کشش}$$

$$\text{sec ②: تنش نرمال در رابط ②: } \sigma_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{-12.5 \times 10^3}{2 \times (8 \times 36)} = -21.7 \text{ MPa} \text{ فشار}$$

$$\text{sec ③: تنش نرمال در رابط ③ در بخش اول: } \sigma_3 = \frac{F_1}{A_3} = \frac{32.5 \times 10^3}{2 \times (26 - 16) \times 8} = 101.6 \text{ MPa}$$

$$\text{sec ③: تنش نرمال در رابط ③ در بخش دوم: } \sigma_3 = \frac{F_1}{A_3} = \frac{32.5 \times 10^3}{2 \times (36 - 16) \times 8} = 101.6 \text{ MPa}$$

$$\text{sec ④: تنش نرمال در رابط ④ در بخش اول: } \sigma_4 = \sigma_2 = -21.7 \text{ MPa}$$

چون عضو در فشار باشد، تنش در بخش دوم با خارج از آن تفاوتی نخواهد داشت.
در رابط ⑤ بین دو سگمنت، تنش فشاری و همواره متعادل خواهد بود.

$$\text{sec ⑤: تنش گسرن بین رابط ⑤: } \sigma_{bs} = \frac{F_1/2}{A_{bs} = dt} = \frac{32.5 \times 10^3 / 2}{16 \times 8} = 127 \text{ MPa}$$

$$\text{sec ⑥: تنش گسرن بین سگمنت ⑥: } \sigma_{bb} = \frac{F_1}{A_{bb} = dt} = \frac{32.5 \times 10^3}{16 \times 10} = 203 \text{ MPa}$$

$$\text{sec ⑦: تنش برشی در سطح (سین) ⑦: } \tau = \frac{F_1/2}{A_7} = \frac{32.5 \times 10^3 / 2}{\frac{1}{4} \pi \times 16^2} = 81 \text{ MPa}$$

$$\text{sec ⑧: تنش برشی در سطح ⑧: } \tau = \frac{V}{A_8} = \frac{20 \times 10^3}{50 \times 10} = 40 \text{ MPa}$$

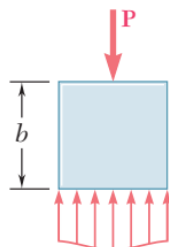
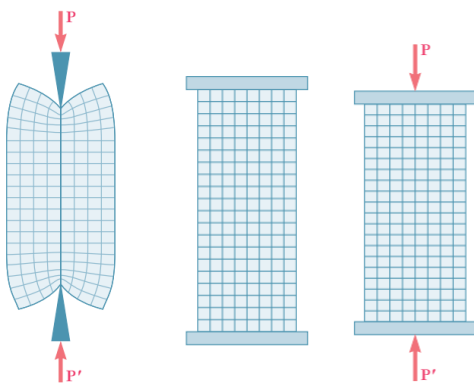


تمرکز تنش

همانطور که در بخش قبل عنوان شد، در کاربردهای مهندسی توزیع تنش در مقطع را یکنواخت فرض می کنند. به همین دلیل تنش حاصل شده از روابط قبلی را تنش میانگین نیز می گویند. اما در واقعیت در بعضی از شرایط اینگونه نیست. و تنش در بعضی از نقاط مقطع مورد بررسی به طور شدیدی غیر یکنواخت است که به این پدیده تمرکز تنش می گویند. در ادامه به مواردی که تمرکز تنش رخ می دهد، اشاره می شود.

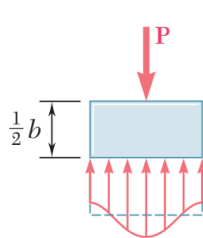
۱- مقاطع نزدیک به نقطه اعمال نیروی متمرکز

اگر هنگام اعمال نیروی متمرکز در دو انتهای یک میله از صفحه صلب استفاده شود، توزیع تنش در محل اعمال نیرو تقریباً یکنواخت خواهد بود. ولی اگر نیروی متمرکز مستقیماً به جسم وارد آید، تمرکز تنش رخ می دهد. هر چه از محل اعمال نیرو فاصله بگیریم، توزیع تنش یکنواخت تر خواهد شد. به این پدیده **اصل سن وانات** نیز گفته می شود.



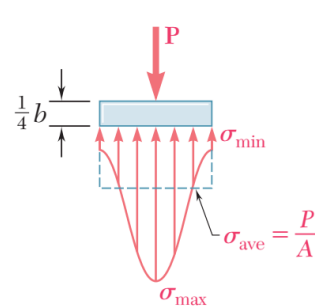
$$\sigma_{\min} = 0.973\sigma_{\text{ave}}$$

$$\sigma_{\max} = 1.027\sigma_{\text{ave}}$$



$$\sigma_{\min} = 0.668\sigma_{\text{ave}}$$

$$\sigma_{\max} = 1.387\sigma_{\text{ave}}$$

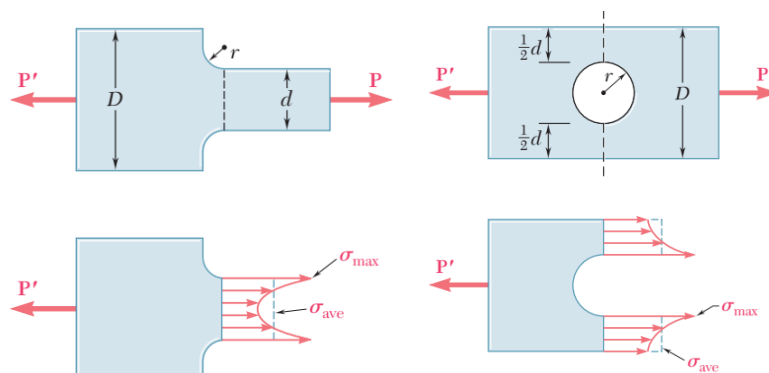


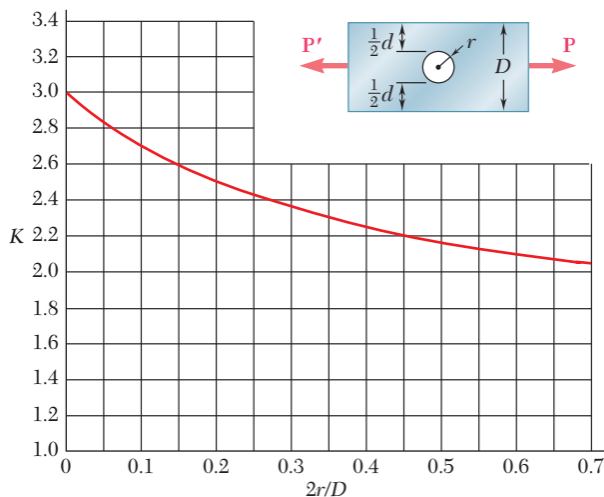
$$\sigma_{\min} = 0.198\sigma_{\text{ave}}$$

$$\sigma_{\max} = 2.575\sigma_{\text{ave}}$$

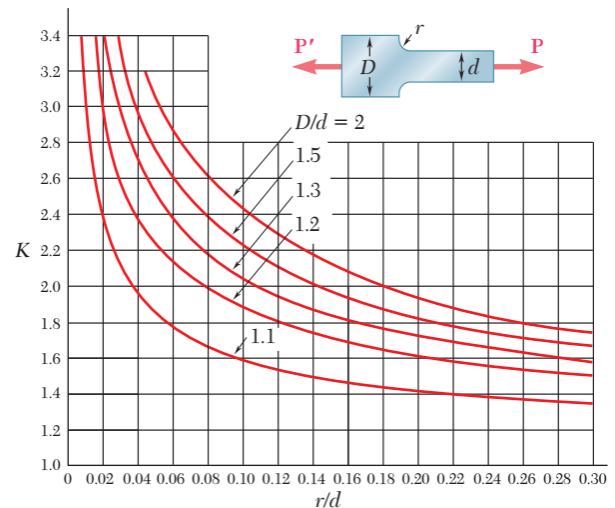
۲- تغییر ناگهانی در مقطع

چنانچه در طول عضو، تغییر مقطع ناگهانی اتفاق بیفتد، در محل تغییر مقطع، تمرکز تنش رخ می دهد.





(a) Flat bars with holes



(b) Flat bars with fillets

K نسبت تنش ماکزیمم به تنش متوسط در مقطع است که از نمودارهای فوق به دست می آید. مشخص است که

$$K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{ave}}}$$

هر چه تغییر نرم تر باشد، مثلاً نسبت r/d بزرگتر باشد، تمرکز تنش کمتر خواهد بود.

به هر حال باید توجه داشت که در این حالات در طراحی باید تنش ماکزیمم $\sigma_{\max}$ را منظور نموده و با تنش مجاز مقایسه کرد.

مثال - تمرکز تنش

نیروی $P = 100 \text{ kN}$ به سیستم زیر وارد می شود. اگر تنش مجاز $\sigma_{\text{all}} = 125 \text{ MPa}$ باشد،
ماده ای که می توانیم برای این سیستم به کار ببریم چیست؟

① درین سوراخ: $r = 20 \text{ mm}$, $D = 88 \text{ mm}$, $\frac{2r}{D} = \frac{40}{88} = 0.45$

$$K = 2.2 \text{ (از نمودار)} \rightarrow \sigma_{\max} = K \sigma_{\text{avg}} = K \frac{P}{(D-2r)t}$$

$$\sigma_{\max} = 2.2 \times \frac{100 \times 10^3}{(88-40)t} \leq \sigma_{\text{all}} = 125 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow t \geq 37 \text{ mm}$$

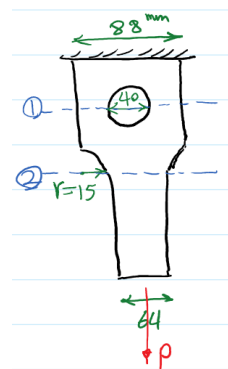
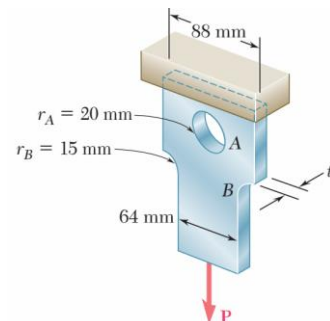
② در محل تغییر مقطع: $r = 15$, $d = 64$, $D = 88$

$$\frac{r}{d} = \frac{15}{64} = 0.23, \quad \frac{D}{d} = \frac{88}{64} = 1.375$$

$$K \approx 1.7 \text{ (از نمودار)} \rightarrow \sigma_{\max} = K \sigma_{\text{avg}} = K \frac{P}{dt}$$

$$\sigma_{\max} = 1.7 \times \frac{100 \times 10^3}{64t} \leq \sigma_{\text{all}} = 125 \rightarrow t \geq 21.25 \text{ mm}$$

$$\text{①, ②} \rightarrow t \geq 37 \text{ mm} \rightarrow \boxed{15E \quad t = 38 \text{ mm}}$$



تذکر مهم: ما در این درس و از این جا به بعد، در حل مسائل فرض می کنیم که تمرکز تنش وجود ندارد مگر این که در صورت

مساله اشاره شده باشد.



مؤلفه های تنش روی سطح مورب

تا کنون مثال هایی که بررسی شد، چنان بود که وضعیت نیرو نسبت به سطح مورد بررسی، یا عمود بود که باعث ایجاد تنش نرمال می شد، یا اینکه مماس بر سطح بود که موجب ایجاد تنش برشی می شد. در این بخش می خواهیم ببینیم که اگر سطح مورد بررسی نسبت به نیرو زاویه داشته باشد، چه تنش هایی در آن ایجاد می شود.

$\sigma_0 = \frac{P}{A_0}$
 $A_0 = A \cos \theta \rightarrow A = \frac{A_0}{\cos \theta}$
 $F = P \cos \theta$
 $V = P \sin \theta$
 $\Rightarrow \sigma_\theta = \frac{F}{A} = \frac{P \cos \theta}{A / \cos \theta} = \frac{P}{A} \cos^2 \theta$
 $\tau_\theta = \frac{V}{A} = \frac{P \sin \theta}{A / \cos \theta} = \frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta$
 $\theta = 0 \rightarrow A_\theta = A. \rightarrow \begin{cases} \sigma_\theta = \sigma = \sigma_{\max} \\ \tau_\theta = 0 \end{cases}$
 $\theta = 45 \rightarrow A_\theta = A \cdot \sqrt{2} \rightarrow \begin{cases} \sigma_{45} = \sigma/2 \\ \tau_{45} = \sigma/2 \end{cases}$

نحوه شکست مصالح ترد و نرم تحت نیروی محوری



این که یک میله تحت نیروی محوری، تحت تنش نرمال (در صفحه قائم) بشکند و یا اینکه تحت تنش برشی (در صفحه ۴۵ درجه) گسیخته شود، بستگی به تنش نهایی نرمال و برشی مصالح آن جسم دارد. بعضی از مصالح مثل فولاد که ماهیت شکل پذیر و نرم دارند، تنش نهایی برشی آنها به طور قابل ملاحظه ای کمتر از تنش نهایی نرمال آنها است و از این رو این مصالح در برش می شکنند. به این صورت که تحت نیروی محوری در مقطع بحرانی نازک شده (مثلا تحت زاویه ۴۵ درجه) و سپس گسیخته می شوند. در مقابل، مصالحی نظیر بتن یا چدن که ماهیت ترد و شکننده دارند، تنش نهایی نرمال آنها بسیار کمتر از تنش نهایی برشی است و بنابراین در صفحه عمود بر محور و به طور قائم می شکنند.



* توجه تفاوت رفتار گسیختگی مصالح کرد نرم در تنش:

در مصالح نرم
 $\sigma > \sigma_u$
 $\tau_{45} < \tau_u$
 به تنش نرمال و فشار اوتریاید به بیش از تنش σ_u رسیده

در صنفه نرمال (A.1) گسیختگی از جنس نرمال رخ می دهد. مصالح نرم Ductile مصالح ترد Brittle

(در مصالح ترد، σ_u و τ_u در یک راستا است)

در مصالح نرم:

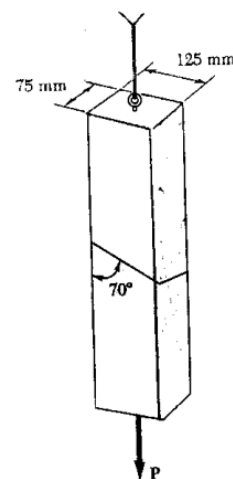
$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma < \sigma_u \\ \tau_{45} > \tau_u \end{array} \right.$$

به تنش برشی زودتر از تنش نرمال به حد گسیختگی می رسد. بنابراین در برش نرمال از گسیختگی گسیختگی رخ می دهد.

(در مصالح نرم، σ_u بزرگتر از τ_u است و بنابراین برش زودتر از کشش رخ می دهد)

مثال - تنش روی سطح

مورب



دو قطعه الوار چوبی مطابق شکل بریده شده و سپس با چسب مجدداً به هم متصل شده اند. اگر تنش

مجاز چسب در تنش نرمال ۵۰۰ کیلو پاسکال و در تنش برشی ۳۰۰ کیلو پاسکال باشد، بیشترین نیرویی که

می توان در کشش به این الوار وارد کرد، چقدر است؟

$$A_0 = 75 \times 125 = 9375 \text{ mm}^2$$

$$\theta = 90 - 70 = 20^\circ$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta \leq \sigma_{all} = 0.5 \text{ MPa} \rightarrow \frac{P}{9375} \cos^2 20^\circ \leq 0.5 \rightarrow P \leq 5.31 \text{ kN} \quad (1)$$

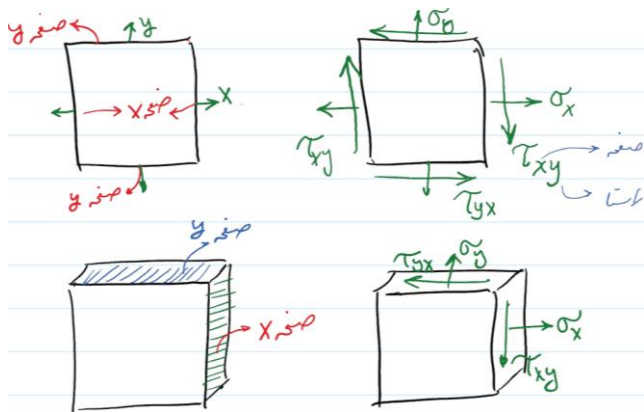
$$\tau_\theta = \frac{P}{A_0} \sin \theta \cos \theta \leq \tau_{all} = 0.3 \text{ MPa} \rightarrow \frac{P}{9375} \sin 20^\circ \cos 20^\circ \leq 0.3 \rightarrow P \leq 8.75 \text{ kN} \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow \boxed{P_{all} = 5.31 \text{ kN}}$$

اگر نیرو افزایش یابد، قطعات در حالت عمودی نسبت از هم جدا می شوند.



تنش در صفحه (اعضای دو بعدی)



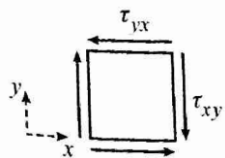
اعضایی که تا کنون بررسی شدند، همگی اعضای میله ای یا یک بعدی بودند. در این بخش به بررسی تنش در اعضای صفحه ای می پردازیم.



چند قاعده:

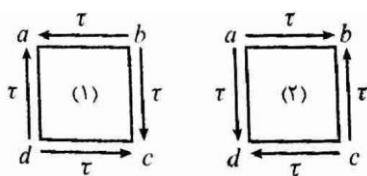
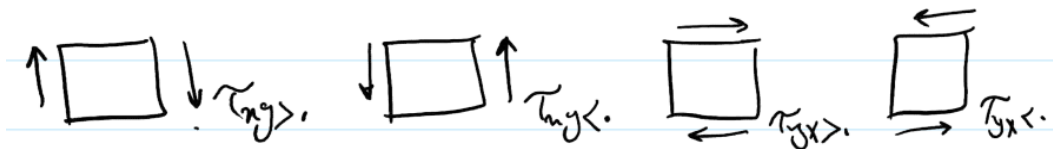
۱- منظور از صفحه X، صفحه عمود بر محور X است. به همین قاعده برای صفحه Y.

۲- نامگذاری تنش های نرمال: σ_x تنش نرمال وارد بر صفحه X و σ_y تنش نرمال وارد بر صفحه Y. تنش های نرمال در جهت کششی مثبت و در جهت فشاری منفی منظور می شوند.



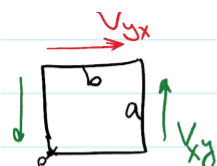
۳- نامگذاری تنش برشی: τ_{xy} یعنی تنش برشی در صفحه X و در راستای محور Y. و τ_{yx} یعنی تنش برشی در صفحه Y و در راستای محور X.

۴- علامت تنش های برشی طبق قاعده این کلاس: اگر تنش برشی باعث دوران ساعتگرد شود، علامت مثبت و برعکس.



۴- **قانون کوشی**: برای حفظ تعادل دورانی المان، تنش های برشی وارد بر دو وجه عمود بر هم المان، از نظر مقداری با هم برابر بوده و از نظر جهت برداری، نسبت به گوشه المان از هم دور شده و یا به هم نزدیک شوند. (یکی از دو حالت روبرو) $[|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}| = \tau]$

مشخص است که با توجه به قانون کوشی، اگر مثلاً τ_{xy} مثبت باشد، τ_{yx} منفی است.



$$\sum M_o = 0 \rightarrow |V_{yx}| \times a - |V_{xy}| \times b = 0 \quad + |V_{xy}| \times b = |V_{yx}| \times a$$

$$\rightarrow |\tau_{xy}| \times (at) \times b = \tau_{yx} \times (bt) \times a$$

$$\rightarrow |\tau_{xy}| = |\tau_{yx}| \rightarrow \boxed{\tau_{xy} = -\tau_{yx}}$$

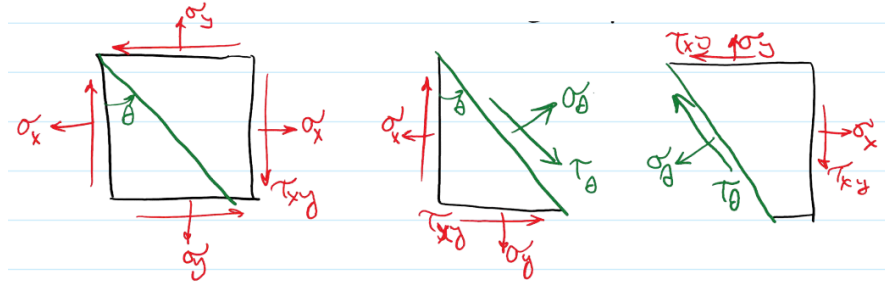


تنش در صفحه مورب در اعضای دو بعدی (تبدیلات تنش در المان دوبعدی)

مشابه آن چه در اعضای میله ای داشتیم، در اعضای دو بعدی هم می توان تنش در هر زوایه ای از المان را محاسبه نمود.

مثلا در المان مقابل، تنش های نرمال و برشی وارد بر صفحات X و Y را داریم و می خواهیم تنش نرمال و برشی وارد بر صفحه θ را

محاسبه کنیم.



$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \rightarrow -\sigma_x(bt) + \tau_{xy}(at) + \sigma_\theta \cos\theta \times (ct) + \tau_\theta \sin\theta \times (ct) = 0 \\ \sum F_y = 0 \rightarrow \tau_{xy}(bt) - \sigma_y(at) + \sigma_\theta \sin\theta \times (ct) - \tau_\theta \cos\theta \times (ct) = 0 \end{array} \right.$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

نکته ۱: اگر در روابط فوق، تنش صفحه Y را صفر در نظر بگیریم ($\sigma_y = 0$)، مساله تبدیل به یک مساله یک بعدی (میله ای) شده و

همان روابط تنش در سطح مورب در میله ها (بخش قبل) به دست می آید.

نکته ۲: دقت شود که در روابط فوق، زوایه θ ، زوایه صفحه مورد نظر نسبت به صفحه X (محور Y) می باشد و در جهت مثلثاتی مثبت

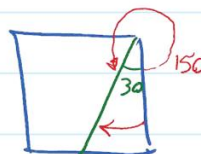
در نظر گرفته می شود. یعنی زوایه ای که صفحه X در جهت مثلثاتی باید بچرخد تا به صفحه مورد نظر برسد. مثال:

* زوایه θ ، زاویه صفحه مورب نسبت به صفحه X (محور Y) می باشد و

در جهت مثبت یا منفی می چرخد.



$$\theta = 30$$



$$\begin{array}{l} \theta = -30 \\ \theta = 150 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} \theta = -60 \\ \theta = 120 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} \theta = -60 \\ \theta = 120 \end{array}$$



صفحات بحرانی تنش

هدف اصلی این است که ببینیم در یک المان دو بعدی که تحت تنش های نرمال و برشی بر روی وجه های X و Y قرار دارد، این المان تحت چه زاویه ای و چگونه (در برش و یا کشش) گسیخته می شود.

۱- صفحات اصلی تنش (صفحه تنش نرمال ماکزیمم)

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\frac{d\sigma_{\theta}}{d\theta} = 0 \Rightarrow -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \times 2 \sin 2\theta - 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta_p = -\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

به دو صفحه (زاویه ای) که در یکی از آنها بیشترین و در دیگری

کمترین تنش نرمال ایجاد می شود، صفحات اصلی تنش گفته می شود.

برای پیدا کردن این زاویه کافی است از رابطه تنش نرمال مشتق بگیریم:

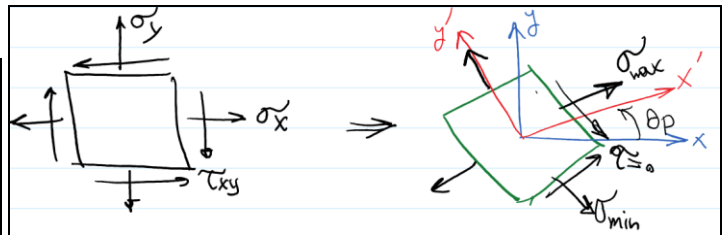
با جاگذاری این زاویه در رابطه تنش نرمال، مقادیر تنش نرمال بیشینه و

کمینه به دست می آید:

* در صفحات اصلی تنش، تنش برشی صفر است.

$$\sigma_o = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{max, min} = \sigma_o \pm R$$



۲- صفحات تنش برشی ماکزیمم

$$\frac{d\tau_{\theta}}{d\theta} = 0 \Rightarrow (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - 2\tau_{xy} \sin 2\theta = 0$$

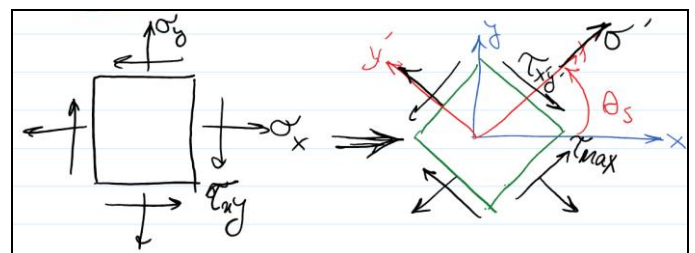
$$\tan 2\theta_s = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

صفحه ای که تنش برشی در آن بیشینه است:

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

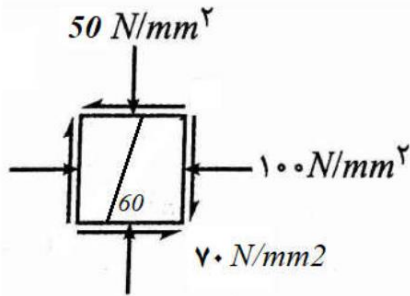
$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = R$$

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \sigma_o$$





مثال: محاسبات تنش در المان دو بعدی



۱- تنش نرمال و برشی روی صفحه مایل نشان داده شده را محاسبه کنید.

۲- تنش نرمال ماکزیمم و صفحه مربوطه را به دست آورید.

۳- تنش برشی ماکزیمم و صفحه مربوطه را به دست آورید.

۴- اگر تنش نهایی نرمال، ۱۱۰ مگاپاسکال و تنش نهایی برشی ۸۰ مگاپاسکال

باشد، چه اتفاقی برای این المان می افتد؟

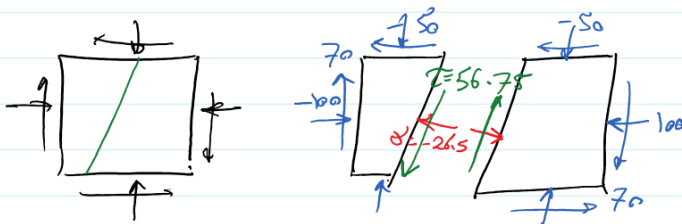
$$\sigma_x = -100, \quad \sigma_y = -50, \quad \tau_{xy} = +70, \quad \theta = -30 \quad (1)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta =$$

$$= \frac{-100 - 50}{2} + \frac{-100 + 50}{2} \cos(-60) - 70 \sin(-60) = -75 - 25(0.5) + 70(0.87) = -26.6 \text{ MPa}$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta =$$

$$= \frac{-100 + 50}{2} \sin(-60) + 70 \cos(-60) = -25(-0.87) + 70(0.5) = 56.75 \text{ MPa}$$



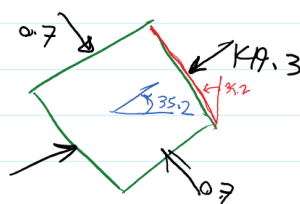
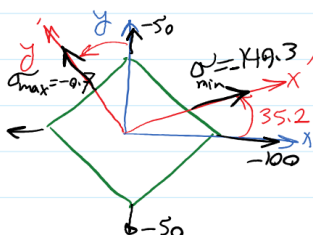
تنش نرمال مایل (۲)

$$\tan 2\theta_p = - \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = - \frac{2 \times 70}{-100 + 50} = 2.8 \rightarrow$$

$$2\theta_p = 70.3 \rightarrow \theta_p = 35.2 \quad \text{نسبت به محور x}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_o + R = \frac{-100 - 50}{2} + \sqrt{\left(\frac{-100 + 50}{2}\right)^2 + 70^2} = -75 + 74.3 = -0.7$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_o - R = -75 - 74.3 = -149.3$$

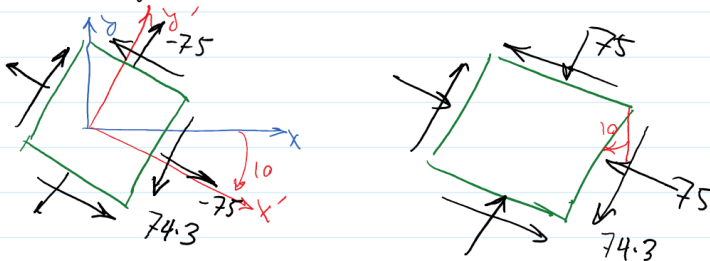




۵) تنش برشی حداکثر

$$\tan 2\theta_s = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{-100 + 50}{2(70)} = -0.36 \rightarrow 2\theta_s = -20 \rightarrow \theta_s = -10$$

$$\tau_{max} = R = \sqrt{\left(\frac{-100 + 50}{2}\right)^2 + 70^2} = 74.3, \quad \sigma' = \sigma'' = -75$$



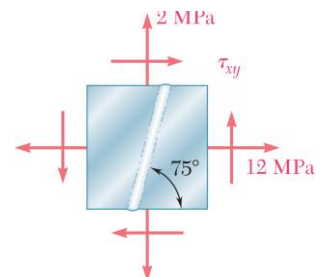
$$\tau_{max} = 74.3 < \tau_u = 80 \rightarrow \text{o.k.}$$

$$|\sigma_{max}| = 149.3 < \sigma_u = 110 \rightarrow \text{n.g.}$$

آن مورد نظر در زاویه 35.2 درجه نسبت به خط قائم، دچار فرسودگی شود.

مثال: محاسبات تنش در

المان دو بعدی



در المان در بعدی تنش داده شده، دو نقطه در هم جوش می‌دهند.

۱) τ_{xy} چقدر باشد تا تنش برشی موازی خط جوش منفی گردد.

۲) اگر $\tau_{xy} = 5$ باشد، تنش کششی جوش در برش 1.5 MPa، در کشش 9 MPa باشد، چه اتفاقی برای جوش می‌افتد؟

$$\sigma_x = 12, \quad \sigma_y = 2, \quad \tau_{xy} = ?, \quad \theta = -15 \quad \text{①}$$

$$\tau(\theta = -15) = 0 \rightarrow \tau_\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$\rightarrow \frac{12-2}{2} \sin(-30) + \tau_{xy} \cos(-30) = 0 \rightarrow -2.5 + \tau_{xy}(0.87) = 0$$

$$\rightarrow \tau_{xy} = 2.87 \text{ MPa}$$



$$\sigma_{\theta} = \frac{12+2}{2} + \frac{12-2}{2} \cos(-30) - 5 \sin(-30) = 13.85 < \sigma_u = 9 \quad \text{؟}$$

$$\tau_{\theta} = \frac{12-2}{2} \sin(-30) + 5 \cos(-30) = 1.85 < \tau_u = 1.5$$

$$\text{stress ratio} \rightarrow \frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_u} = \frac{13.85}{9} = 1.54 \quad \left. \begin{array}{l} \text{کمتر از ۱ است} \end{array} \right\}$$

$$\frac{\tau_{\theta}}{\tau_u} = \frac{1.85}{1.5} = 1.23$$

→ تنش در کنتنر گسیخته خواهد شد.

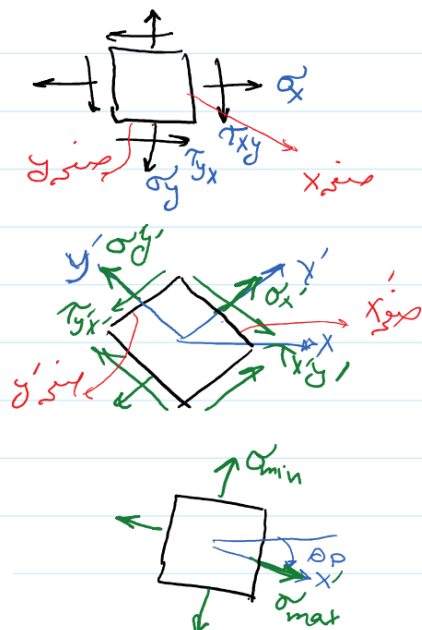
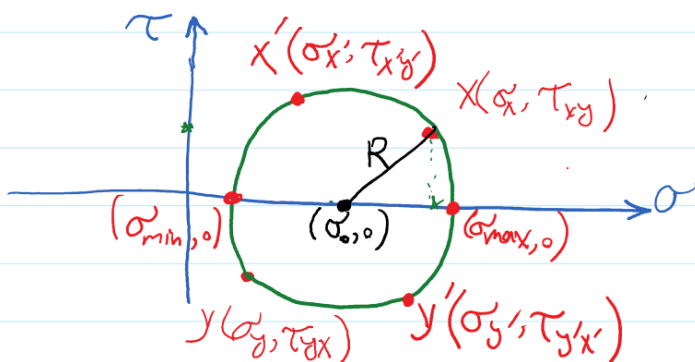
روش ترسیمی دایره مور برای تبدیلات تنش

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\begin{cases} \sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_{\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{(\sigma_{\theta} - \sigma_{\theta})^2 + \tau_{\theta}^2 = R^2}$$

σ_{θ} ، τ_{θ} نقاطی روی دایره مرکز $(\sigma_{\theta}, 0)$ ، شعاع R می باشند.

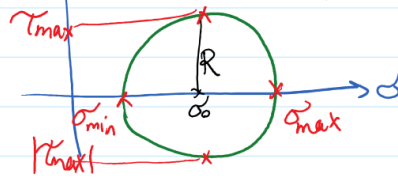




① چونکه روی دایره، منطبق با یکدیگر روی آن است.

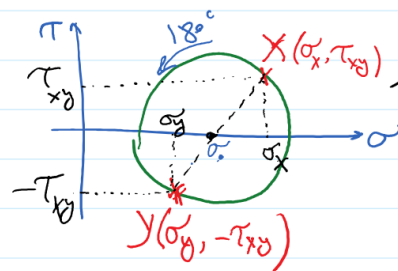
② دوتری که در آن هر رشت از صفحه ۱ رشتی ۲ به اندازه θ در هر یک

روی دایره مورد درج جهت به اندازه 2θ در هر یک منطبق با نقطه متقاطع در یک

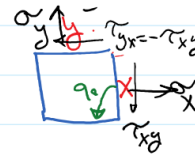


③ صفت اصلی تنش در یک دایره دایره ۱

$$\tau_{max} = R, \quad R = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$



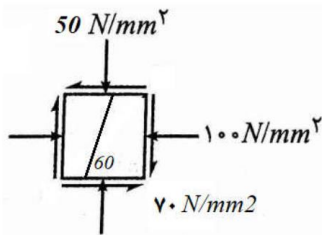
④ تنش در دایره محور درجه ۱، در هر دایره روی یک قطر قرار می گیرند.



۵- مجموع تنش در هر یک در صفحه عمود بر هم در هر دایره ثابت است.

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{min} + \sigma_{max}}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma'_x + \sigma'_y}{2} = \dots$$





مثال: دایره مور : مثال صفحه ۲۲ را با دایره مور حل کنید.

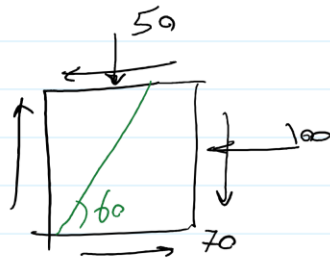
۱- تنش نرمال و برشی روی صفحه مایل نشان داده شده را محاسبه کنید.

۲- تنش نرمال ماکزیمم و صفحه مربوطه را به دست آورید.

۳- تنش برشی ماکزیمم و صفحه مربوطه را به دست آورید.

۴- اگر تنش نهایی نرمال، ۱۱۰ مگاپاسکال و تنش نهایی برشی ۸۰ مگاپاسکال باشد، چه اتفاقی برای این المان می افتد؟

تنش نرمال ماکزیمم و حداقل در دایره مور

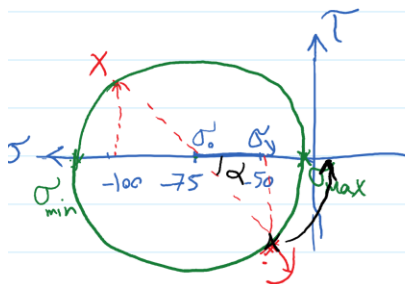


$$\sigma_x = -100, \sigma_y = -50, \tau_{xy} = 70$$

$$\sigma_o = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = -75$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{-100 + 50}{2}\right)^2 + 70^2} = 74.3$$

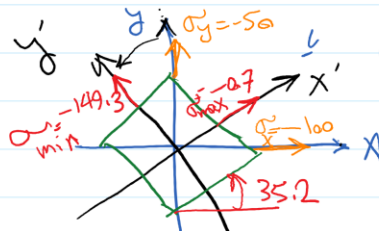
$$X = (-100, 70), Y = (-50, -70)$$



$$\sigma_{max} = \sigma_o + R = -75 + 74.3 = -0.7$$

$$\sigma_{min} = \sigma_o - R = -75 - 74.3 = -149.3$$

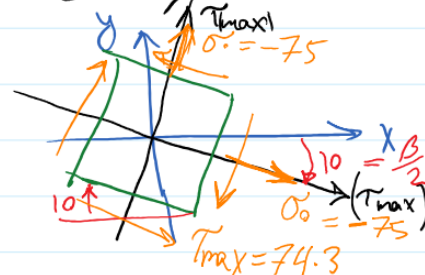
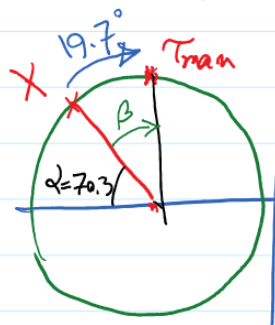
$$\sin \alpha = \frac{|\tau_{xy}|}{R} = \frac{70}{74.3} \rightarrow \alpha = 70.3$$

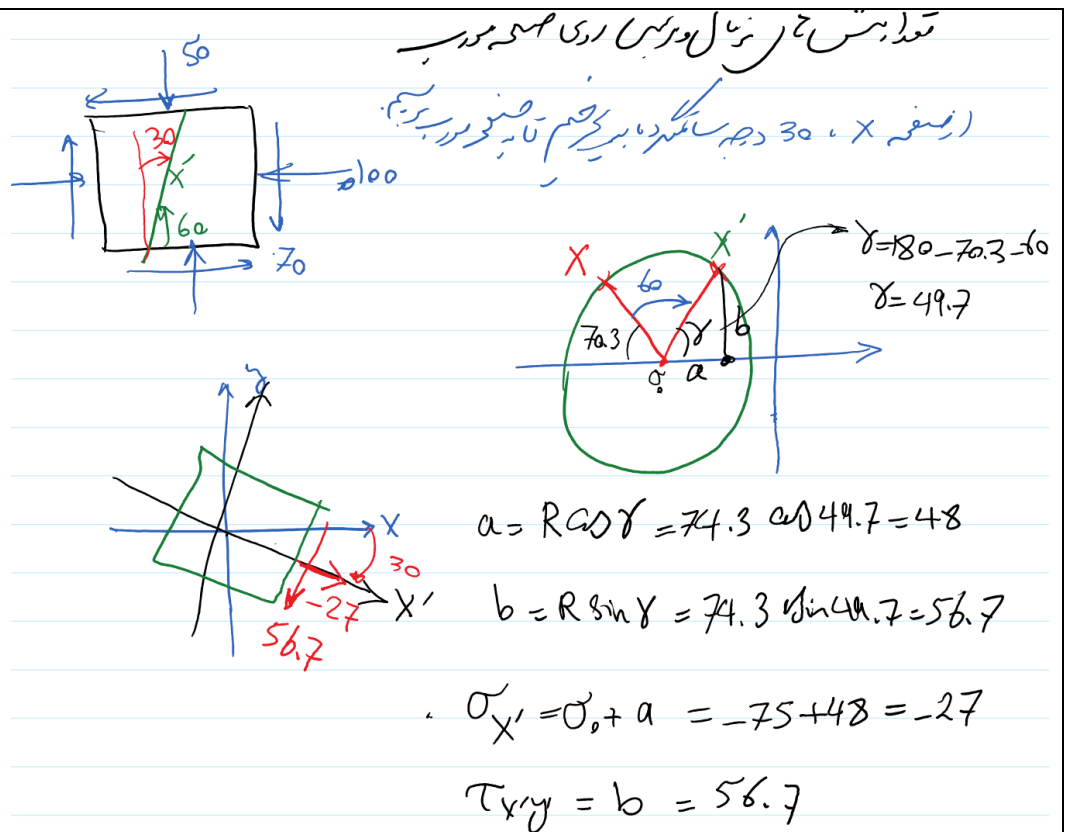


$$\tan \alpha = \frac{70}{25} = 2.8$$

$$\theta_p = \frac{\alpha}{2} = 35.2$$

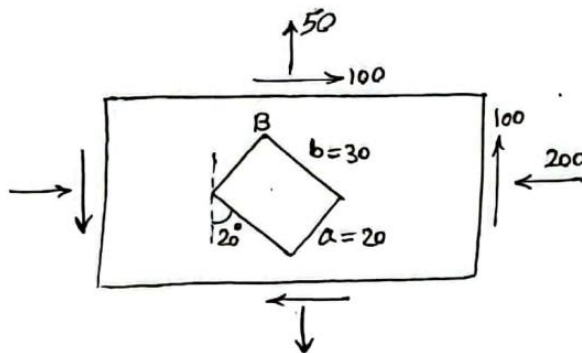
تنش برشی ماکزیمم و حداقل در دایره مور







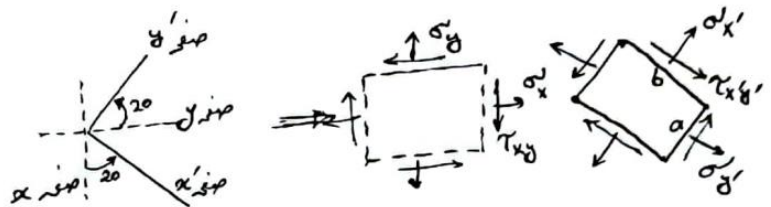
مثال: پایان ترم ۱۴۰۱-۱



در صفحه ردیبرد، برای تنش‌ها وارد شده،
موارد زیر را به دست آورید.

۱- تغییر ابعاد a و b ۲- تغییر زاویه B ۳- کرنش نرمال‌های $\sigma_x = 220 \text{ MPa}$ و $\sigma_y = 120 \text{ MPa}$ باشد، چه

اتفاقی برای صفحه می‌افتد؟ (از روش دایره مورخه کنید)
($E = 110 \text{ GPa}$ ، $\nu = \frac{1}{3}$)



$$\sigma_x = -200, \quad \sigma_y = 50, \quad \tau_{xy} = -100, \quad \theta_x = 20^\circ, \quad \theta_y = 110^\circ$$

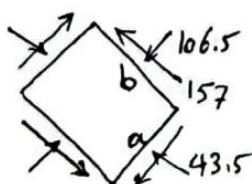
برای محاسبه Δb ، ابتدا باید تنش‌های طولی در این دو راستا را به دست آوریم. پس
کرنش‌های طولی در این دو راستا را محاسبه کنیم.

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta_{x'} - \tau_{xy} \sin 2\theta_{x'}$$

$$\sigma_{x'} = \frac{-200 + 50}{2} + \frac{-200 - 50}{2} \cos 40 - (-100) \sin 40 = -106.5$$

$$\sigma_{y'} = \frac{-200 + 50}{2} + \frac{-200 - 50}{2} \cos 2\theta_{y'} - (-100) \sin 2\theta_{y'} = -43.5$$

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta_{x'} + \tau_{xy} \cos 2\theta_{x'} \\ &= \frac{-200 - 50}{2} \sin 40 - 100 \cos 40 = -157 \end{aligned}$$



$$\epsilon_a = \epsilon_{x'} = \frac{\sigma_{x'}}{E} - \nu \frac{\sigma_{y'}}{E}$$

$$\epsilon_b = \epsilon_{y'} = \frac{\sigma_{y'}}{E} - \nu \frac{\sigma_{x'}}{E}$$



$$\epsilon_a = \frac{(-106.5)}{110 \times 10^3} - 0.3 \times \frac{(-43.5)}{110 \times 10^3} = 8.49 \times 10^{-4} \rightarrow \Delta a = a \epsilon_a = 0.017 \text{ mm}$$

$$\epsilon_b = \frac{(-43.5)}{110 \times 10^3} - 0.3 \times \frac{(-106.5)}{110 \times 10^3} = -1.05 \times 10^{-4} \rightarrow \Delta b = b \epsilon_b = 0.0032 \text{ mm}$$

$$\gamma_B = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{110}{2(1+0.3)} = 42.3 \text{ GPa} \quad (2)$$

$$\gamma_B = \frac{-157}{42.3 \times 10^3} = -3.71 \times 10^{-3} \text{ Rad} = -0.21^\circ \quad \text{زاویه بریده} = 90 - 0.21 = 89.79^\circ$$

(3) باید تنش ها را در برش ماکزیمم محاسبه کرد.

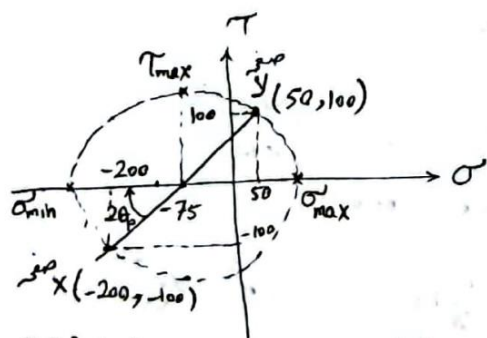
$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

به سی استاندارد از روابط فوق می توان از زاویه مور نیز استفاده کرد.

$$\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right) = \left(\frac{-200 + 50}{2}, 0 \right) = (-75, 0)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{-200 - 50}{2}\right)^2 + (-100)^2} = 160$$



$$\sigma_{\max} = \sigma_c + R = -75 + 160 = 85$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_c - R = -75 - 160 = -235$$

$$\tau_{\max} = R = 160$$

صفحه اصلی تنش $\sigma_{\min}$ می باشد. برای رسیدن به این صفحه در دایره مور $2\theta_p$ خلاف عقربه ای باید از صفحه X بچرخیم.

$$\sin(2\theta_p) = \frac{\tau_{xy}}{R} = \frac{100}{160} \rightarrow 2\theta_p = 38.7 \rightarrow \theta_p = 19.3^\circ$$

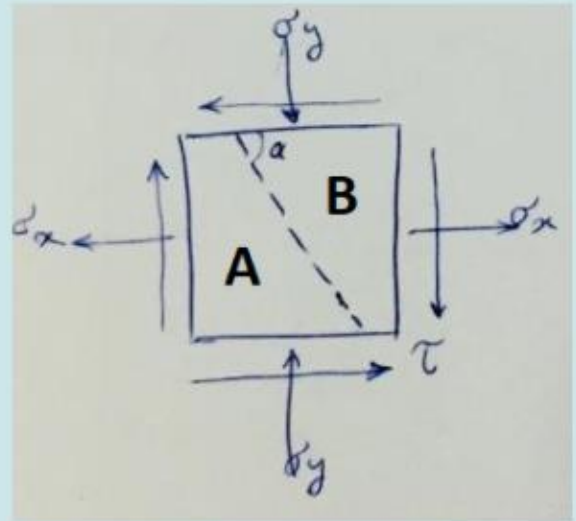
$$|\sigma_{\max} - \sigma_{\min}|_{\max} = 235 \stackrel{?}{<} 2\sigma_u = 220 \rightarrow N.G. \rightarrow \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_u} = \frac{235}{220} = 1.07$$

$$\tau_{\max} = 160 \stackrel{?}{<} \tau_u = 120 \rightarrow N.G. \rightarrow \frac{\tau_{\max}}{\tau_u} = \frac{160}{120} = 1.33$$

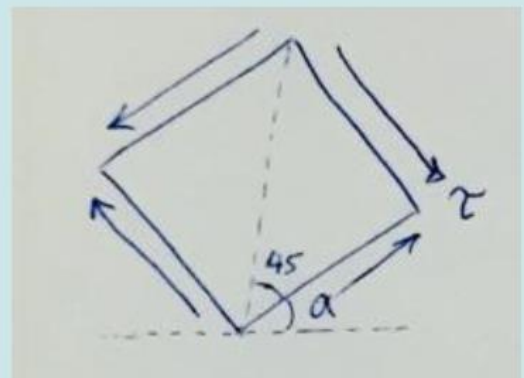
بنابراین وضعیت برش بحرانی است. صفحه مورد نظر در صفحه θ نسبت به صفحه X در یک چرخش می باشد.



تمرین های بیشتر



دو صفحه A , B توسط جوش (خط چین) به هم متصل شده اند. جنس جوش طوری است که تنش محوری تحمل نکرده و تحت کوچکترین تنش محوری گسیخته می شود ولی تحمل تنش برشی آن بسیار زیاد است. تنش برشی وارد بر لبه المان (τ) چقدر باشد تا برای جوش مشکلی پیش نیاید. تنش σ_x برابر 120 مگاپاسکال و تنش σ_y برابر 70 مگاپاسکال و زاویه α برابر 50 درجه می باشد.



در المان فوق، زاویه α برابر 30 درجه و تنش برشی وارد بر اضلاع لبه المان برابر 40 مگاپاسکال است. تنش محوری وارد بر قطر المان چقدر است؟

حمله بی قراریت از طلب قرار توست

طالب بی قرار شو تا که قرار آیدت

مولانا