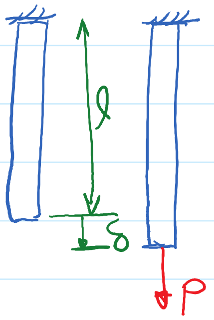
جلسه ۱۲- کرنش

دوشنبه, ۲۲ فروردین ۱۴۰۱ ۰۲:۲۹ ب.ظ

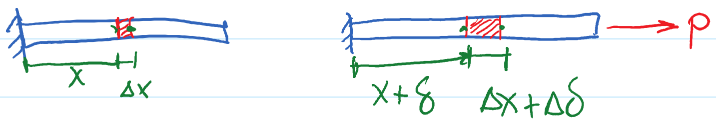


کرنش : نسبت تغییر شکل به شکل اولیه

↳ برای اعضای میله‌ای تک‌بعدی یا محوری ← نسبت تغییر طول به طول اولیه

$\delta = \varepsilon \times L \rightarrow \varepsilon = \frac{\delta}{L}$ (کرنش متوسط)

تعریف ریاضی و دقیق :

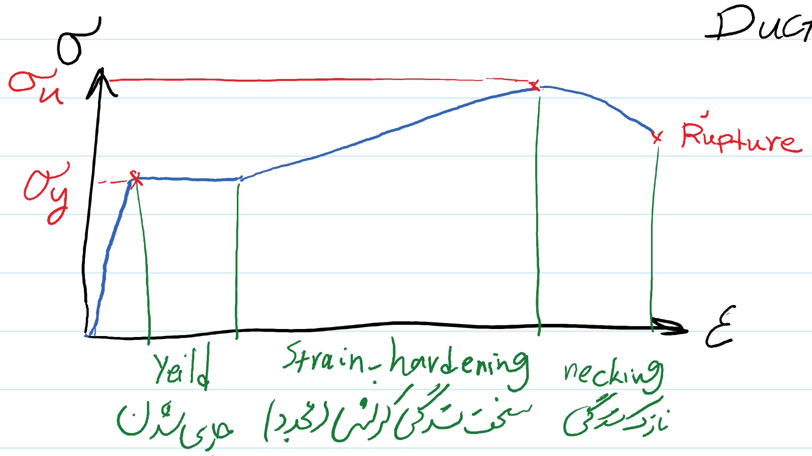


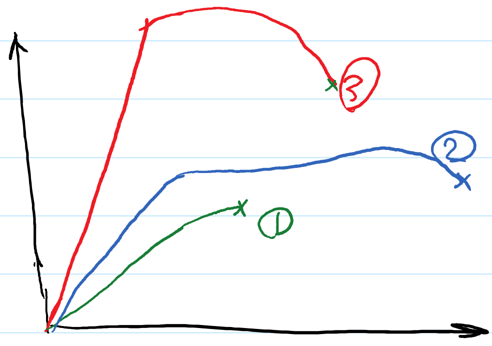
$\rightarrow \varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta x}$

انواع کرنش

- کرنش های ناشی از تنش نرمال
- کرنش حرارتی
- کرنش جانبی
- کرنش های ناشی از تنش برشی

رفتار مصالح شکل پذیر : Ductile





* مشخصات قابل استنتاج از نمودار تنش کرنش

سختی ③ > ② > ①

مقاومت ③ > ② > ①

شکل پذیری ② > ③ > ①

* محاسبه کرنش ناشی از تنش محوری:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\sigma}{E}} \longrightarrow \delta = \varepsilon L = \frac{\sigma}{E} \times L$$

* محاسبه کرنش حرارتی:

$$\boxed{\varepsilon = \alpha \Delta T} \longrightarrow \delta = \varepsilon L = \alpha L \Delta T$$

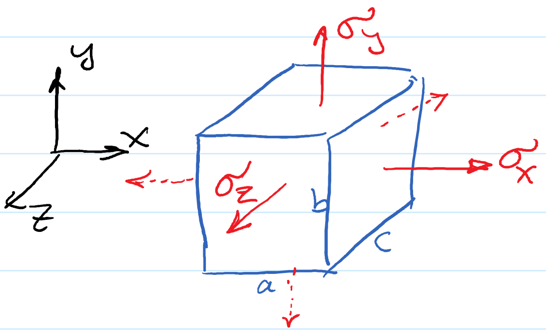
* محاسبه کرنش جانبی:

فرض کنید که در راستای x، کرنش طولی ε_x وجود دارد. سپس این کرنش در راستای y و z کرنش جانبی ایجاد خواهد شد.

$$\boxed{\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \times \varepsilon_x}$$

ν: نسبت پواسون

* محاسبه کرنش در حالت کلی:

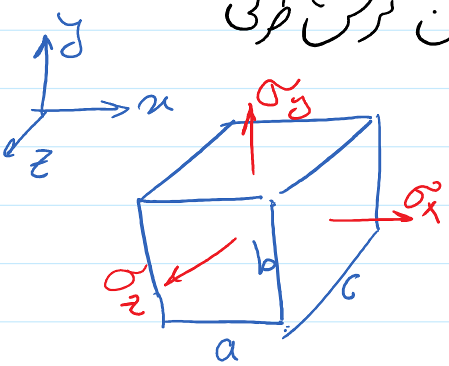


$$\varepsilon_x = \underbrace{\frac{\sigma_x}{E}}_{\text{کرنش محوری ناشی از تنش طولی}} \underbrace{- \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}}_{\text{کرنش جانبی ناشی از تنش های طولی در دو جهت دیگر}} + \underbrace{\alpha \Delta T}_{\text{کرنش حرارتی}}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} + \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \alpha \Delta T$$

* محاسبه تغییر شکل (تغییر طول، تغییر سطح و تغییر حجم) با داشتن کرنش های طولی



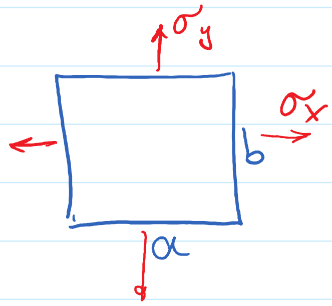
* تغییر طول

$$\Delta a = \varepsilon_x \times a$$

$$\Delta b = \varepsilon_y \times b$$

$$\Delta c = \varepsilon_z \times c$$

* تغییر سطح



$$\Delta A = \varepsilon_A \times A$$

$$\left[\begin{array}{l} \Delta A = \Delta(ab) = a\Delta b + b\Delta a \\ \varepsilon_A = \dfrac{\Delta A}{A} = \dfrac{a\Delta b}{ab} + \dfrac{b\Delta a}{ab} = \dfrac{\Delta b}{b} + \dfrac{\Delta a}{a} \end{array}\right]$$

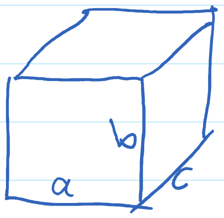
$$\rightarrow \boxed{\varepsilon_A = \varepsilon_x + \varepsilon_y} \rightarrow \Delta_A = \varepsilon_A \times A$$

البته به جای این کار می‌توان مساحت جدید را به دست آورد و منهای مساحت اولیه کرد:

$$A_2 = (a+\Delta a)\times(b+\Delta b) = ab + a\Delta b + b\Delta a + \cancel{(\Delta a \times \Delta b)}^{0}$$

$$A_1 = ab \longrightarrow \Delta A = a\Delta b + b\Delta a \xrightarrow{\text{تقریباً مساوی با}} \Delta A = \varepsilon_A \times A$$

* تغییر حجم:



$$\Delta V = \varepsilon_V \times V$$

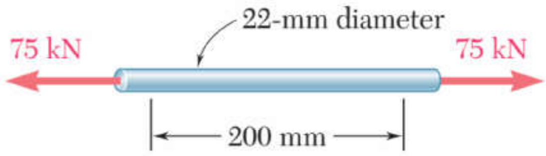
$$\left[\begin{array}{l} \Delta V = \Delta(abc) = ab\Delta c + ac\Delta b + bc\Delta a \\ \varepsilon_V = \dfrac{\Delta V}{V} = \dfrac{ab\Delta c}{abc} + \dfrac{ac\Delta b}{abc} + \dfrac{bc\Delta a}{abc} = \dfrac{\Delta c}{c} + \dfrac{\Delta b}{b} + \dfrac{\Delta a}{a} \end{array}\right.$$

$$\rightarrow \boxed{\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z} \rightarrow \Delta V = \varepsilon_V \times V$$

(در پرانتز) ← رابطه مستقیم ε_V با تنش‌های کلی:

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \longrightarrow \varepsilon_V = \frac{(1-2\nu)}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + 3\alpha\Delta T$$

مثال ①



یک میله فولادی ($E = 200\ GPa$, $\upsilon = 0.3$) با قطر 22^{mm} و طول 200^{mm} تحت اثر نیروی کششی 75^{kN} قرار دارد. محاسبه کنید:

الف) تغییر طول میله

ب) تغییر قطر میله

الف)

$$\Delta L = \varepsilon_x \times L = \left(\frac{\sigma_x}{E} - \upsilon \cancel{\frac{\sigma_y}{E}} - \upsilon \cancel{\frac{\sigma_z}{E}}\right) L = \frac{\sigma_x}{E} \times L = \frac{P/A}{E} \times L$$

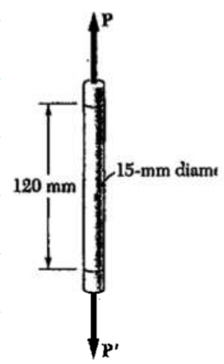
$$\Delta L = \left(\frac{75000\ N / \frac{1}{4}\pi \times 22^2\ mm^2}{200 \times 10^3\ N/mm^2}\right) \times 200\ mm = \underbrace{(9.87 \times 10^{-4})}_{\varepsilon_x} \times 200 = 0.197\ mm$$

ب)

$$\Delta d = \varepsilon_y \times d \text{ یا } \varepsilon_z \times d = \left(\cancel{\frac{\sigma_y}{E}} - \upsilon \frac{\sigma_x}{E} - \upsilon \cancel{\frac{\sigma_z}{E}}\right) \times L = -\upsilon \frac{\sigma_x}{E} \times L$$

$$\Delta d = -\upsilon(\varepsilon_x)\, d = -0.3 \times (9.87 \times 10^{-4}) \times 22\ mm = \underbrace{(-2.961 \times 10^{-4})}_{\varepsilon_y} \times 22 = -0.0065^{mm}$$

مثال ۲



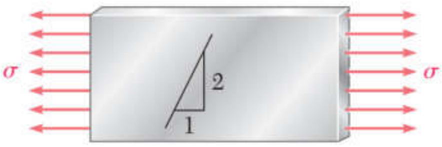
میله‌ای با قطر 15^{mm} ، طول 120^{mm} ، تحت اثر نیروی کشش 3.5^{kN} قرار دارد. اگر افزایش طول میله برابر 11^{mm} ، و کاهش قطر آن 0.62^{mm} باشد، ضریب الاستیسیته و ضریب پواسون را بدست آورید.

$$\delta_x = \varepsilon_x \times L \quad \left(\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{P/A}{E}\right) \longrightarrow 11\ mm = \left(\frac{3.5 \times 10^3 / \frac{1}{4}\pi \times 15^2}{E}\right) \times 120^{mm}$$

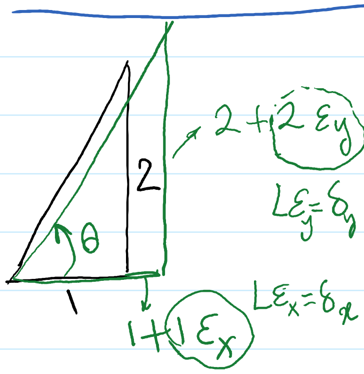
$$\longrightarrow E = 216\ \frac{N}{mm^2} = 216\ MPa$$

$$\delta_y = \varepsilon_y \times D \xrightarrow{\varepsilon_y = -\upsilon \varepsilon_x} \upsilon = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{\delta_y / D}{\Delta L / L} = \frac{0.62/15}{11/120} = 0.451$$

مثال ۳:



یک صفحه آلومینیم $(E = 74\ GPa,\ \nu = 0.33)$، تحت تنش محوری σ قرار می‌گیرد. قبل از اعمال تنش، مثلث با شیب $2:1$ بر روی صفحه رسم می‌گردد. چنانچه تنش به 125^{MPa} برسد، شیب مثلث چقدر خواهد شد؟



$$tg\theta = \frac{2+2\varepsilon_y}{1+1\varepsilon_x} = \frac{\text{ارتفاع جدید}}{\text{طول جدید}}$$

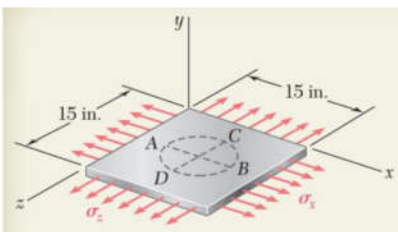
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\cancel{\frac{\sigma_y}{E}} - \nu\cancel{\frac{\sigma_z}{E}} = \frac{125^{MPa}}{74000_{MPa}} = 1.689\times10^{-3}$$

$$\varepsilon_y = \cancel{\frac{\sigma_y}{E}} - \nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\cancel{\frac{\sigma_z}{E}} = -\nu\,\varepsilon_x = -0.33\times = -0.557\times10^{-3}$$

بعد از اعمال تنش $\rightarrow tg\theta = \dfrac{2 - 2\times0.557\times10^{-3}}{1+1.689\times10^{-3}} = 1.995$

قبل از اعمال تنش $\rightarrow tg\theta = \dfrac{2}{1} = 2$

مثال ۲:



بر روی یک صفحه آلومینیمی $(E = 10^7\ psi,\ \nu = \frac{1}{3})$ با ضخامت $\frac{3}{4}^{in}$ یک دایره به قطر $d = 9^{in}$ رسم شده است. چنانچه مطابق شکل، صفحه تحت تنش‌های $\sigma_x = 12\ ksi$، $\sigma_z = 20^{ksi}$ قرار بگیرد، مطلوبست تغییر در پارامترهای زیر:

۱) قطر AB ۲) قطر CD ۳) ضخامت ورق ۴) حجم ورق

$$\delta_{AB} = d\cdot\varepsilon_x \ ,\ \delta_{CD} = d\cdot\varepsilon_z \ ,\ \delta_t = t\cdot\varepsilon_y \ ,\ \Delta V = \varepsilon_v\cdot V$$

$\delta_{AB} = d\cdot\varepsilon_x$: $\varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \nu\dfrac{\sigma_y}{E} - \nu\dfrac{\sigma_z}{E}$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{10^7}\left(12000 - 0 - \frac{1}{3}\times20000\right) = 0.533\times10^{-3}$$

$$\delta_{AB} = \overset{(in)}{9} \times 0.533\times10^{-3} = +4.8\times10^{-3} \ (in)$$

$$\delta_{CD} = d\cdot\varepsilon_z \quad : \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} =$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{10^7}\left(20000 - \frac{1}{3}\times12000\right) = +1.6\times10^{-3}$$

$$\delta_{CD} = \overset{(in)}{9} \times 1.6\times10^{-3} = +14.4\times10^{-3} \ (in)$$

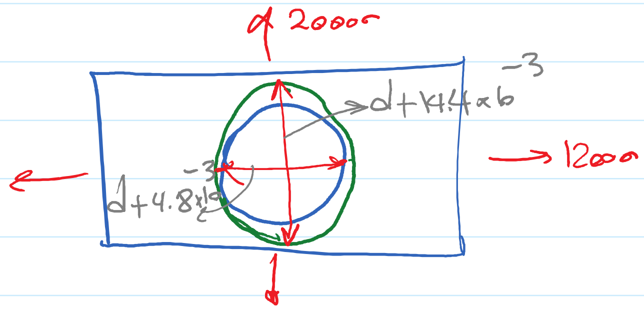
$$\delta_t = t\cdot\varepsilon_y \quad : \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} =$$

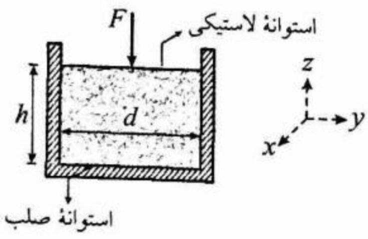
$$\varepsilon_y = \frac{1}{10^7}\left(0 - \frac{1}{3}\times12000 - \frac{1}{3}\times20000\right) = -1.067\times10^{-3}$$

$$\delta_t = \overset{(in)}{\frac{3}{4}} \times \left(-1.067\times10^{-3}\right) = -0.8\times10^{-3}$$

$$\Delta V = \varepsilon_V \times V \quad : \quad \varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 1.066\times10^{-3}$$

$$\Delta V = \left(15\times15\times\frac{3}{4}\right)\times \downarrow = 0.187 \ in^3$$





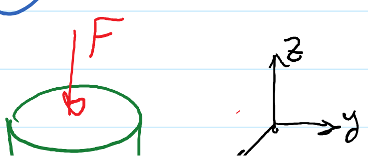
یک استوانهٔ لاستیکی با قطر d و ارتفاع h، در داخل استوانه‌ای صلب قرار گرفته و نیروی F بر آن وارد می‌شود:

الف) مقدار فشار بین لاستیک و استوانهٔ صلب چقدر است؟

ب) میزان تغییر ارتفاع استوانهٔ لاستیکی چقدر است؟

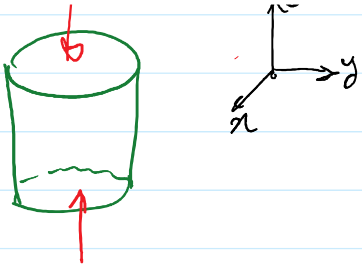
(مدول الاستیسیتهٔ لاستیک E و ضریب پواسون آن ν است)

گلدا ریدیله اول فرض کنیم. ظرف صلب استوانه‌ای وجود نداره. چه اتفاقی برای لاستیک داخل استوانه می‌افتد؟



$$\Delta h = h\cdot\varepsilon_z$$

استوانه می‌کند:



$$\Delta h = h \cdot \varepsilon_z$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \cancel{\frac{\sigma_x}{E}} - \nu \cancel{\frac{\sigma_y}{E}}$$

$$\varepsilon_z = \frac{F/A}{E} = -\frac{F}{AE}$$

در حالت اول $\Delta h = -\dfrac{Fh}{AE}$

حالا فرض کنید که استوانه لاستیکی، داخل ظرف استوانه‌ای صلب قرار داده می‌شود.

$$\Delta h = h \cdot \varepsilon_z$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} \quad ①$$

در این حالت $\sigma_x = \sigma_y$ که صفر نیست. فرض می‌کنیم.

$\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ مجهول است.

باید دنبال یک معادله بگردیم تا σ را حاصل کنیم. ←

$\varepsilon_x = 0$ $\quad \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \nu \dfrac{\sigma_y}{E} - \nu \dfrac{\sigma_z}{E} = 0 \quad ②$

$$\frac{\sigma}{E} - \nu \frac{\sigma}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = 0 \rightarrow \sigma = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z$$

①, ② : $\varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z}{E} - \dfrac{2\nu}{E}\left(\dfrac{\nu}{1-\nu}\right)\sigma_z = 0 \rightarrow \varepsilon_z = \dfrac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}\dfrac{\sigma_z}{E}$

$\sigma_z = -\dfrac{F}{A} \rightarrow$ $\quad \varepsilon_z = -\left(\dfrac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}\right)\dfrac{F}{AE}$

در حالت دوم $\Delta h = \varepsilon_z \cdot h = -\left(\dfrac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}\right)\dfrac{Fh}{AE}$

طول ارتفاع

با مقایسه Δh در دو حالت، واضح است که فشردگی در حالت دوم کمتر است.

با توجه به Δh در درجات، اهمیت آن در فشردگی درجات دوم کمتر است.

اصولاً هرچه محوریت بیشتر باشد، فشردگی کمتر است. نقش بیشتری می‌تواند دارد.