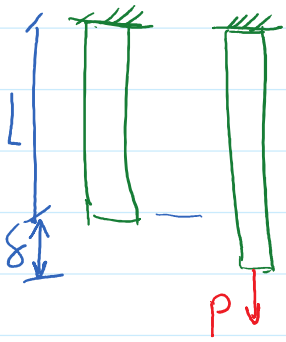
جلسه ۱۴ - نیروی محوری

دوشنبه, ۲۹ فروردین ۱۴۰۱ ۰۸:۰۱ ق.ظ



$$\delta = \varepsilon \cdot L$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P/A}{E} = \frac{P}{AE}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = \frac{PL}{EA}}$$

$$P = K \cdot \Delta \longrightarrow \boxed{K = \frac{AE}{L}}$$

میله معادل فنر، سختی

سختی محوری

$$\delta = \int_0^L \frac{P(x)}{E(x)\,A(x)}\,dx$$

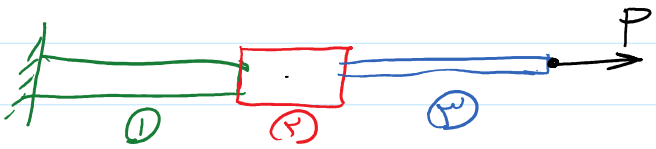
حالتی پارامترهای P ، A ، E در طول عضو تغییر می‌کنند.

که $P(x)$ ، $A(x)$ ، $E(x)$ توابعی از طول هستند.

در این حالت خاص، فرض کنید که خیلی کوچک‌تر از المان‌ها P ، A ، E آن‌ها متغیرند را المان‌بندی کرده‌ایم

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i L_i}{E_i A_i}$$

$$+ \sum \alpha_i L_i \Delta T_i$$



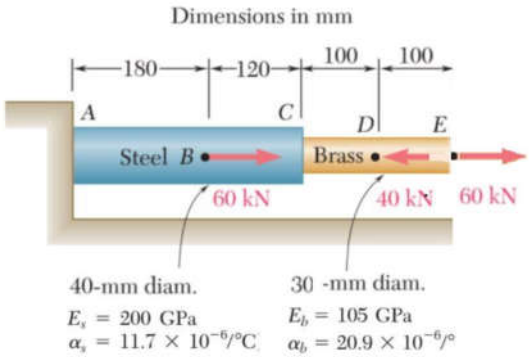
مثال ۱: محاسبه تغییرطول یک عضو چند میله ای

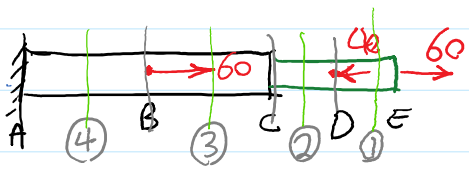
در عضو چند میله ای روبرو، علاوه بر نیروهای اعمال شده،

اختلاف دمای ۳۰ درجه نیز به سیستم وارد می شود.

الف- تغییرطول کل عضو را محاسبه کنید.

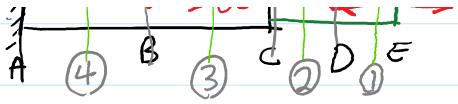
ب- تغییرمکان نقطه D چقدر است؟



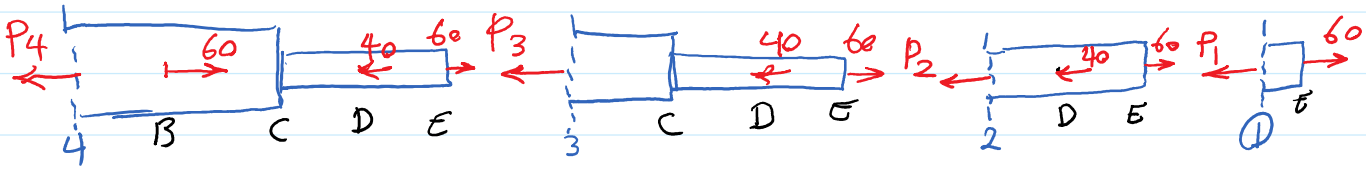


قدم اول: جدا سازی قطعات مستقل محوری از یکدیگر

قدم دوم: محاسبه نیروی محوری داخلی با تعادل محوری



تمرین: مساله نیروی محوری (حل مسئله محوری)



$P_4 = 60-40+60 = 80$ $\quad P_3 = 60-40 = 20$ $\quad P_2 = 60-40 = 20$ $\quad P_1 = 60$

$$\delta = \sum \frac{P_i L_i}{E_i A_i} + \sum \alpha_i L_i \Delta T$$

$$\delta_1 = \frac{P_1 L_1}{E_1 A_1} + \alpha_1 L_1 \Delta T_1 = \frac{60000 \times 100}{105000 \times \frac{1}{4}\pi(30)^2} + 20.9\times10^{-6} \times 100 \times 30 = 0.08 + 0.0627 = 0.14 \text{ mm}$$

$$\delta_2 = \frac{20000 \times 100}{105000 \times \frac{1}{4}\pi(30)^2} + 20.9\times10^{-6} \times 100 \times 30 = \frac{0.08}{3} + 0.0627 = 0.09 \text{ mm}$$

$$\delta_3 = \frac{20000 \times 120}{200000 \times \frac{1}{4}\pi(40)^2} + 11.7\times10^{-6} \times 120 \times 30 = 0.0096 + 0.042 = 0.05 \text{ mm}$$

$$\delta_4 = \frac{80000 \times 180}{200000 \times \frac{1}{4}\pi(40)^2} + 11.7\times10^{-6} \times 180 \times 30 = 0.057 + 0.063 = 0.12 \text{ mm}$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = 0.14 + 0.09 + 0.05 + 0.12 = 0.4 \text{ mm}$$ انبساط کل

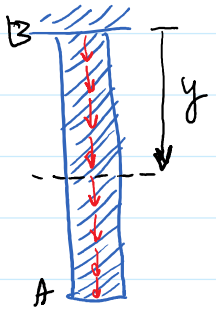
$$\Delta_D = \Delta_{D/A} = \delta_4 + \delta_3 + \delta_2 = 0.12 + 0.05 + 0.09 = 0.26 \text{ mm} \rightarrow$$

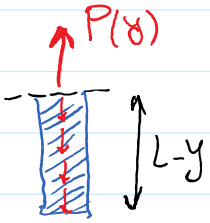
مثال ۲: محاسبه تغییرطول یک عضو دارای خصوصیات متغیر نسبت به طول (در این مثال نیروی محوری در طول عضو تغییر می کند)

یک میله همگن به طول L و چگالی ρ و مدول الاستیسیته E از یک سر آویزان شده است.

الف) مقدار تغییرطول میله را تحت وزن خودش محاسبه کنید.

ب) نشان دهید که این مقدار تغییرطول معادل تغییرطول میله ای می باشد که تحت نیروی محوری برابر نصف وزن میله قرار گرفته است.





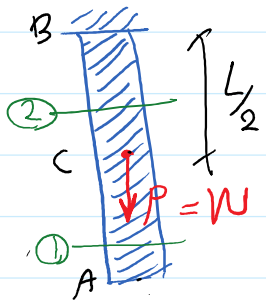
الف)

$$P(y) = \rho g \cdot A \cdot (L-y)$$

$$\delta = \int_0^L \frac{P(y)}{EA}\,dy$$

$$\delta = \int_0^L \frac{\rho g \cdot A \cdot (L-y)}{E \cdot A}\,dy = \frac{\rho g}{E}\int_0^L (L-y)\,dy = \frac{\rho g}{E}\left(Ly - \tfrac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^L$$

$$\delta = \frac{\rho g}{E}\left(L^2 - \frac{L^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\rho g L^2}{E}$$



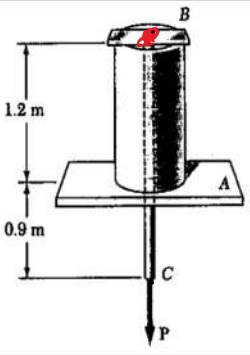
ب)

$$\Delta = \delta_1 + \delta_2 = \delta_2 = \frac{P \times L/2}{EA} = \frac{\overbrace{\rho g A L}^{W} \times L/2}{EA}$$

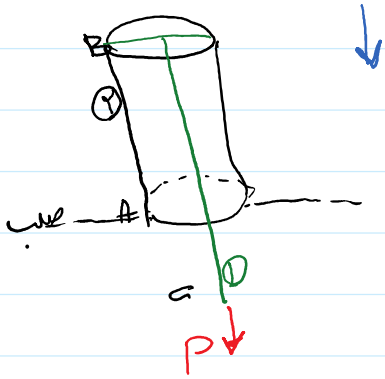
$\delta_{AC} = 0 \rightarrow P_1 = 0$ چون نیروی دافع نمی شود

$$= \frac{1}{2}\frac{\rho g L^2}{E}$$

مثال ۳: محاسبه تغییرمکان نقطه ای خاص از سیستم



یک لوله آلومینیمی AB ($E_a = 72$ GPa) با سطح مقطع $1100\ mm^2$ بر روی یک تکیه گاه صلب قرار گرفته است. یک میله فولادی BC ($E_s = 200$ GPa) با قطر $15\ mm$ به وسیله یک قطعه صلب از انتهای آزاد لوله آویزان شده است. چنانچه نیروی $60\ kN$ به انتهای میله فولادی وارد شود، جابجایی نقطه C چقدر خواهد شد؟



$\downarrow \Delta_C = |\delta_{1\ \text{میله}}| + |\delta_{2\ \text{قوطی}}|$

(از اثر طول دار (نیروی کششی)) (کاهش طول (نیروی فشاری))

هرکدام تغییر شکل هر دو عضو باعث می شود که نقطه C به سمت پایین حرکت کند.

$$\delta_1 = \frac{P_1 L_1}{E_1 A_1} = \frac{P^{=60000\ N} \times 2100^{mm}}{200{,}000 \times \frac{1}{4}\pi (15)^2} = 3.57\ mm \downarrow$$

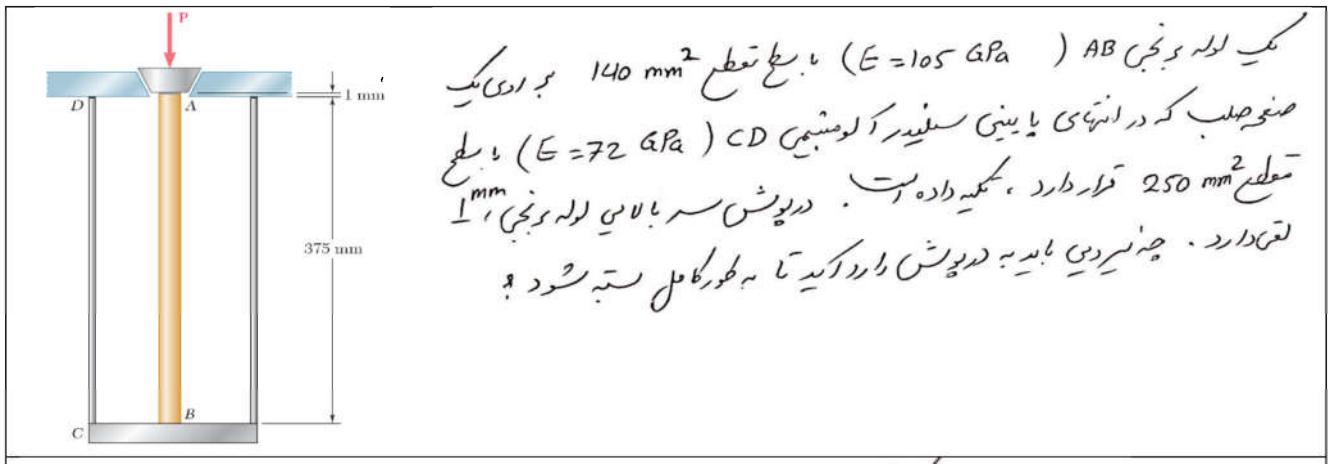
کش می آید

$$\delta_2 = \frac{P_2 L_2}{E_2 A_2} = \frac{-60000 \times 1200^{mm}}{72{,}000 \times 1100\ mm^2} = -0.91 \downarrow$$

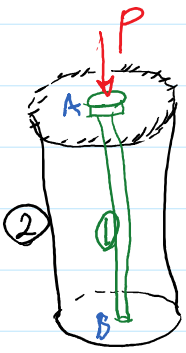
فشرده می شود.

$$\Delta_C = \Delta_{C/B} + \Delta_B = \delta_1 \downarrow + \delta_2 \downarrow = 3.57 + 0.91 = 4.47^{mm} \downarrow$$

مثال ۴: محاسبه تغییرمکان نقطه ای خاص از سیستم



یک لوله برنجی AB ($E = 105\ GPa$) با سطح مقطع $140\ mm^2$ بر روی یک صفحه صلب که در انتهای پایینی سیلندر آلومینیمی CD ($E = 72\ GPa$) با سطح مقطع $250\ mm^2$ قرار دارد، تکیه داده است. در پوشش سر بالایی لوله برنجی، 1^{mm} لقی دارد. چه نیرویی باید به درپوش وارد کنید تا به طور کامل بسته شود؟



میله ۱ فشرده می شود و قوطی ۲ کشیده می شود. هردو تغییر شکل در راستای ↓ هستند.

برای این تغییر مکان نقطه A به سمت پایین باید از مجموع فشردگی میله ۱ و کش آمدن قوطی ۲ می باشد.

$$\downarrow \Delta_A = |\delta_1| + \delta_2 = 1\ mm$$

$\Delta_A = |\delta_1| + \delta_2 = 1 \text{ mm}$ توطی ۲ می‌باشد.

$$\delta_1 = \frac{P_1 L_1}{E_1 A_1} = \frac{P \times 376}{105000 \times 140} = -25.58 \times 10^{-6} P$$

$$\delta_2 = \frac{P_2 L_2}{E_2 A_2} = \frac{P \times 375}{72000 \times 250} = 20.83 \times 10^{-6} P$$

$$\Delta_A = (25.58 + 20.83) \times 10^{-6} P = 1 \text{ mm} \rightarrow P = 21.55 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$P = 21.55 \text{ kN}$$